

Vallée

<36635607310014

TRAITÉ

DE LA

GÉOMÉTRIE

DESCRIPTIVE.

Cet Ouvrage, orné du portrait de M. Monge, *gravé en taille-douce, est composé d'un vol. in-4° et d'un atlas de 67 planches, même format.*

Tous les exemplaires de cette édition sont signés par l'auteur.

IMPRIMERIE DE HUZARD-COURCIER,
rue du Jardinet, n° 12.



GASPARD MONGE.

TRAITÉ

DE LA

GÉOMÉTRIE

DESCRIPTIVE;

PAR L. L. VALLÉE,

ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, INGÉNIEUR EN CHEF AU CORPS ROYAL DES PONTS ET CHAUSSÉES, CORRESPONDANT DE LA SOCIÉTÉ D'ÉMULATION DE CAMBRAI.

DEUXIÈME ÉDITION,

REVUE, CORRIGÉE, AUGMENTÉE, ET MISE A LA PORTÉE DES PERSONNES QUI N'ONT ÉTUDIÉ QUE LA GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE.

Pour faire fleurir l'industrie française, il faut diriger l'éducation nationale vers la connaissance des objets qui exigent de l'exactitude.

MONGE. *Leçons de l'École normale.*



PARIS,

BACHELIER, SUCCESSEUR DE Mme Ve COURCIER, LIBRAIRE,

QUAI DES AUGUSTINS, n° 55.

1825.


BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS

A M. MONGE,

Comte de Péluse.

Monsieur le Comte,

Depuis que je m'occupe de cet Ouvrage, l'idée de vous le dédier, comme au père de la Science dont il traite, et comme au fondateur d'une Ecole à laquelle je dois tout, a sans cesse entretenu le zèle dont j'avais besoin.

En acquittant cette dette de mon cœur, Monsieur le Comte, il me semble entendre

l'Europe savante, et les hommes distingués que l'École polytechnique a produits, applaudir à ma voix et encourager mes premiers travaux.

Daignez accueillir avec cette bonté paternelle qui vous caractérise, ce faible hommage de ma reconnaissance.

J'ai l'honneur d'être avec la plus profonde vénération,

Monsieur le Comte,

Votre très humble et très obéissant serviteur,

L. L. Vallée.

INSTITUT DE FRANCE.

ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES,

SÉANCE DU 18 MAI 1818.

RAPPORT

SUR LE MANUSCRIT SOUMIS A L'EXAMEN DE L'ACADÉMIE *.

La Géométrie descriptive, dans l'acception qu'on a donnée à ce mot depuis l'établissement de l'École polytechnique, enseigne à représenter sur une surface plane les objets qui ont trois dimensions, et à résoudre par le seul secours de la règle et du compas, en partant des données d'un dessin *géométral*, des questions qui, de prime abord, sembleraient exiger des moyens beaucoup plus compliqués.

L'expérience avait conduit de bonne heure aux procédés d'après lesquels les architectes, les tailleurs de pierre et les charpentiers construisent leurs épures; mais ces méthodes n'ont été réunies en corps de doctrine et débarrassées de tout empirisme que de nos jours. C'est à M. Monge qu'on en est redevable. Les Leçons de Géométrie descriptive de ce savant illustre, renferment une exposition des principes de la science, qui sera toujours citée comme un modèle parfait de clarté. On regrette, toutefois, que cet Ouvrage ne soit pas plus étendu; car les artistes qui n'ont pas fait une étude spéciale des Mathématiques ne peuvent se rendre les méthodes de projection familières, qu'en variant les données des questions et en s'exerçant sur un grand nombre d'exemples. Déjà, en 1812, M. Hachette avait rempli en partie cette lacune par un supplément faisant suite aux Leçons de M. Monge, et auquel l'Académie accorda son approbation.

* Ce manuscrit est celui de la première édition. Le ch. IV du liv. IV n'en faisait pas partie. L'atlas, dont le nombre des planches a été porté à 60, et dans cette seconde édition à 67, n'en présentait que 59.

C'est en suivant les traces des deux savans que nous venons de nommer, ses anciens professeurs à l'École polytechnique, que M. Vallée a rédigé le Traité complet dont l'Académie nous a chargés de lui rendre compte.

Cet Ouvrage, composé de plus de *cinq cents* pages in-4°., est divisé...
....
(*voyez* la fin de l'Introduction).

L'Ouvrage de M. Vallée est trop étendu pour que vos Commissaires aient pu s'imposer l'obligation de le lire en entier. Ils se sont contentés d'examiner avec attention les parties les plus difficiles, et se plaisent à reconnaître qu'elles sont rédigées avec beaucoup de méthode et de clarté.

Les 59 planches qui accompagnent le texte sont parfaitement dessinées. Chaque épure offre, dans les plus petits détails, toutes les constructions qu'il faut exécuter pour arriver à la solution du problème, et néanmoins on n'y remarque aucune confusion. En un mot, il nous a paru que le nouveau Traité de M. Vallée, est digne, sous tous les rapports, de l'approbation de l'Académie. Il est à désirer que cet habile Ingénieur puisse trouver dans les encouragemens du Gouvernement, les moyens de livrer son Ouvrage à l'impression, et qu'il achève ceux dont il s'est déjà occupé, et qui doivent contenir les applications de la Géométrie descriptive à l'art du charpentier et à celui du tailleur de pierre.

Signé PRONY, FOURIER, ARAGO *rapporteur*.

L'Académie approuve le Rapport et en adopte les conclusions.

Certifié conforme à l'original,

Le Secrétaire perpétuel, Chevalier des Ordres royaux de Saint-Michel et de la Légion-d'Honneur,

Signé DELAMBRE.

INTRODUCTION.

Nos idées ne sont pas toutes de nature à pouvoir être communiquées par le moyen d'une langue écrite ou parlée. Celles qui tiennent aux formes et aux positions des corps sont particulièrement dans ce cas; aussi a-t-on souvent besoin, pour les transmettre, d'aider le discours de représentations qui s'adressent à la vue.

La Géométrie élémentaire, quoiqu'elle ne considère que des grandeurs fort simples, fournit perpétuellement des exemples où ce besoin de représentations se fait sentir. Il est vrai que les figures qu'elle emploie ne sont pas absolument indispensables, car leur composition étant toujours expliquée par le texte, on peut, à la rigueur, les concevoir dans l'espace sans l'aide d'un dessin; mais comme elles montrent tout d'un coup des grandeurs que le discours ne décrit que successivement, elles sont toujours extrêmement utiles.

Ces figures, malgré les idées de rigueur que l'on attribue généralement à tout ce qui dépend de la science de l'étendue, sont pour la plupart tracées arbitrairement, et sans autre règle que ce qu'on appelle le goût. On ne sait exécuter rigoureusement, par les principes de la Géométrie élémentaire, que les figures qui représentent des grandeurs situées dans un même plan : les autres ne sont que des espèces de vues, faites d'après des conventions tacites dépourvues quelquefois de toute exactitude. Ainsi, par exemple, la figure du cylindre circonscrit à la sphère, qu'Ar-

chimède fit graver sur son tombeau, et qu'on retrouve dans tous les élémens de Géométrie, est une figure inexacte; parce qu'elle contient un grand cercle, qui est censé représenter la sphère, et qui selon des principes rigoureux ne peut remplir cet objet.

Néanmoins les figures exactes et les figures inexactes sont de la même utilité dans les démonstrations, parce qu'elles sont aussi propres, les unes que les autres, à fixer dans l'esprit l'idée des grandeurs qu'elles indiquent. Elles présentent seulement une différence bien remarquable, c'est qu'on opère avec la règle et le compas par le moyen des premières, et qu'on ne peut point opérer par le moyen des dernières. Nous allons rendre cette vérité sensible, au moyen de deux problèmes.

1er *Problème. Trois points étant donnés sur un plan, trouver le centre du cercle auquel ils appartiennent.*

2e *Problème. Quatre points étant donnés dans l'espace, trouver le centre de la sphère à laquelle ils appartiennent.*

On sait qu'on résoudra le premier problème en élevant, sur le milieu des trois droites qui joignent deux à deux les points donnés, des perpendiculaires à ces droites, et que le centre demandé sera le point d'intersection de ces perpendiculaires. Pour le second, on sait que chaque plan perpendiculaire au milieu d'une des droites qui joignent deux des points donnés contient le centre demandé, et que ce centre est conséquemment l'intersection de quatre plans déterminés.

On connaît donc le moyen d'obtenir les solutions de ces deux problèmes, et il semblerait, d'après cela, que la Géométrie élémentaire enseignât les constructions nécessaires pour les résoudre tous les deux : c'est pourtant ce qui n'est pas. On résout complètement le premier, parce que les données qui lui appartiennent, et les constructions qu'il exige, sont toutes dans un même plan, en sorte que la figure contient toujours le cercle

demandé. Il en est tout autrement pour le second : le raisonnement définit bien la position du centre de la sphère cherchée; une figure de Géométrie élémentaire peut bien la représenter, ainsi que tous les plans qui se coupent suivant son centre et qui le déterminent; mais ce n'est pas une figure exacte sur laquelle on puisse opérer et prendre la véritable grandeur de la sphère, ce n'est qu'une espèce de vue, qui aide l'esprit à concevoir le mécanisme de la solution, et qui n'est d'ailleurs d'aucune utilité.

Or, il y a une infinité de problèmes, très utiles pour les arts, qui sont dans le même cas que le dernier de ceux que nous venons d'examiner : il est donc nécessaire d'avoir un moyen de construire leurs solutions; et pour cela il faut savoir opérer sur des grandeurs situées dans l'espace, aussi rigoureusement qu'on opère sur des grandeurs situées dans un même plan.

Opérer sur des grandeurs connues, ou *représenter des grandeurs définies*, c'est d'ailleurs la même chose; car les opérations rigoureuses qui conduisent à un résultat sont une définition de ce résultat. Ainsi, ayant résolu la question de représenter un système de grandeurs données, ou ce qui revient au même, de représenter un corps dont toutes les parties soient rigoureusement définies de forme et de position, on saura faire sur des grandeurs quelconques toutes les opérations possibles.

Pour parvenir à la résoudre, nous allons examiner la nature du dessin d'imitation, et nous verrons sortir de notre examen un moyen de représentation qui réunira la commodité des opérations à la rigueur des résultats.

Imaginons dans l'espace un corps, par exemple un polyèdre, vu par un spectateur placé dans une position fixe. Tous les points du polyèdre, visibles pour le spectateur, enverront à son œil des rayons lumineux dont l'ensemble produira la perception du corps : et si l'on considère séparément une face de ce polyèdre, il est clair qu'elle sera la base d'une pyramide dont l'œil sera le sommet, et

qui sera remplie par les rayons lumineux. Cela posé, concevons qu'on place le plan d'un tableau en arrière du polyèdre, et qu'on prolonge jusqu'à ce plan les faces de la pyramide dont nous venons de parler; elles détermineront sur le tableau un polygone d'intersection qui sera l'image de la face en question, et l'on obtiendra celle du polyèdre tout entier, en exécutant la même opération pour chaque face apparente. De plus, il suffira d'ajouter au dessin obtenu l'artifice des couleurs, pour qu'il produise toute l'illusion possible.

Or, un tel dessin est ce qu'on appelle une *vue linéaire*, ou une *perspective linéaire* (*) de l'objet représenté; et la position de l'œil du spectateur est ce qu'on nomme le *point de vue* de cette perspective.

Les dessinateurs habiles parviennent, il est vrai, sans tout cet appareil de constructions, à former des images assez fidèles des objets qu'ils ont sous les yeux; mais il est évident que leurs dessins représentent d'autant mieux les formes de ces objets, qu'ils approchent davantage de la perfection mathématique que l'on vient d'indiquer.

Revenons à la face polygonale que nous avons considérée. Si elle est parallèle au plan du tableau, l'image et l'objet seront deux polygones semblables qui ne différeront que par leurs dimensions; et si elle est oblique, l'image ne sera pas même semblable au modèle : il sera altéré en tous sens, et de telle sorte que deux côtés, qui dans l'espace seraient égaux et parallèles, auront leurs images inégales et non parallèles.

En s'arrêtant à l'hypothèse d'une face parallèle au plan du tableau, on voit que la différence entre l'image et le modèle

(*) On se contente quelquefois de la dénomination de *vue* ou de *perspective*, mais ici nous devons employer l'épithète de *linéaire*, afin qu'on entende bien que l'image ne présente que des lignes.

diminue, à mesure que le point de vue s'éloigne; c'est-à-dire, à mesure que les rayons visuels, menés de l'œil à chaque point de l'objet, deviennent moins divergens. Qu'arrivera-t-il si le point de vue, que l'on doit supposer placé sur une perpendiculaire correspondante au centre du tableau, s'éloigne assez pour que ces rayons puissent être considérés comme parallèles entre eux? Il est évident, 1°. que toute ligne parallèle au plan du tableau sera représentée dans sa véritable grandeur, et qu'il ne manquera plus à la description complète de cette ligne, que sa distance à ce plan; 2°. que toute ligne perpendiculaire sera représentée par un point, et que, pour qu'elle soit entièrement connue, il ne manquera que les distances de ses extrémités au plan du tableau; 3°. enfin, que toute ligne oblique sera représentée par une autre ligne, et que l'on aura la longueur de la ligne représentée, quand on connaîtra les distances des extrémités de cette ligne au tableau; car ces distances détermineront avec la ligne qui servira d'image, un trapèze dont les angles adjacens à cette image seront droits, et dont le quatrième côté sera la ligne représentée. En un mot, toutes les arêtes du polyèdre, et toutes ses diagonales quelconques, seront représentées de manière qu'il ne manquera plus, pour les connaître entièrement, que d'avoir les distances du tableau aux différens sommets du polyèdre.

Or, il est visible que ces distances seront données immédiatement par une seconde représentation de l'objet, faite sur un plan perpendiculaire au premier tableau; et que chaque tableau sera représenté sur l'autre par leur commune intersection.

Si le premier tableau est horizontal, par exemple, le second sera vertical, tous les rayons visuels correspondans au premier seront verticaux, et ceux qui correspondront au dernier seront horizontaux; toutes les lignes horizontales seront représentées sur le premier dans leurs grandeurs réelles, et toutes les lignes verticales aussi dans leurs grandeurs réelles sur le second; toutes les

lignes obliques seront faciles à construire par le moyen de trapèzes qui seront déterminés, et qui donneront les angles de ces lignes et des tableaux : enfin, sachant trouver la véritable grandeur d'une ligne oblique représentée sur les deux tableaux, on saura trouver les grandeurs des côtés d'un triangle quelconque dont on aurait les représentations sur les mêmes tableaux ; et comme ses angles s'ensuivront, il est clair qu'on pourra construire dans leurs véritables dimensions toutes les grandeurs dépendantes de l'objet représenté.

Ainsi l'on pourra déduire de la représentation d'un plan quelconque et de deux droites quelconques, les angles des droites et du plan, l'angle des droites entre elles, leur plus courte distance, les plans menés par les droites perpendiculairement au plan représenté, l'intersection de ces plans, etc., etc.

Tel est le mode rigoureux de représentation adopté par les artistes, et dont cette première idée ne peut que faire entrevoir les avantages.

Les figures que ce mode exige, et qui sont déterminées, comme nous l'avons dit, par les pieds des perpendiculaires abaissées d'un système quelconque de points sur un plan, s'appellent des *projections orthogonales*.

Quelquefois ces figures s'obtiennent par le moyen des intersections de droites parallèles entre elles, mais obliques par rapport aux plans des figures, alors elles prennent le nom de *projections obliques* (*).

Dans tous les cas, on donne à ces plans le nom de *plans de*

(*) Il y a une troisième sorte de projections qu'on nomme *projections centrales*, parce que les lignes qui les déterminent partent toutes d'un même point qu'on nomme *centre*. Ces projections s'appellent proprement des *perspectives* : le livre II de la *Science du Dessin* enseigne tout ce qui s'y rapporte.

projection, et l'on connaît sous celui de *Méthode des projections*, les différentes manières d'opérer sur les grandeurs géométriques par le moyen des projections obliques et orthogonales.

Les objets dont on s'occupe dans la pratique ayant presque toujours une situation déterminée relativement à l'horizon et à la verticale, il est naturel de les rapporter à des plans de projection horizontaux et verticaux; aussi l'usage de ces plans est-il très fréquent. On nomme *projections horizontales*, les projections faites sur des plans horizontaux; et celles qui sont faites sur des plans verticaux s'appellent des *projections verticales*.

Dans les arts, on donne aux projections horizontales le nom de *plans*, et aux projections verticales celui d'*élévations*.

Lorsqu'il arrive que le plan de projection tranche l'objet représenté, comme lorsqu'on veut en Architecture faire voir des *intérieurs*, on donne à la projection correspondante le nom de *coupe*, qui se donne aussi à la section faite par le plan coupant. Si le plan de projection est vertical, la projection s'appelle *coupe verticale;* et si ce plan est horizontal, on donne à la projection le nom de *coupe horizontale*. Cependant si l'on considère ces projections, plutôt comme des projections que comme des coupes, on ne leur donne pas d'autres noms que ceux d'*élévations* et de *plans*.

Les plans, les coupes, les élévations, et les projections quelconques, s'appellent des *dessins géométraux*.

L'un des principaux avantages de ces dessins, c'est qu'ils sont souvent intelligibles pour les personnes mêmes qui ne savent pas de Géométrie, et cela tient à ce qu'ils font image. Il est vrai, ainsi que nous l'avons dit tout-à-l'heure, que pour considérer une projection comme une perspective, il faut supposer que le point de vue soit à l'infini, ce qui empêche qu'elle puisse faire un effet bien satisfaisant quand on la voit de près; cependant c'est à la propriété des dessins géométraux de donner, par la simple inspection, l'idée

des corps qu'ils représentent, qu'on doit attribuer la grande utilité dont ils sont pour les arts.

Ceux du tailleur de pierre et du charpentier sont absolument fondés sur la théorie des projections. Ils ont néanmoins été perfectionnés bien avant cette théorie; aussi doit-on avouer que les artistes, par les seuls efforts de leur esprit, et sans autre secours que celui d'une Géométrie très bornée, avaient résolu presque tous les problèmes importans que comporte la méthode des projections, avant que cette méthode ne fût considérée comme une science particulière, dont l'Art du tailleur de pierre et l'Art du charpentier ne sont réellement que des applications.

C'est l'illustre Monge qui ayant enseigné la Coupe des pierres, la Charpenterie, l'Art de déterminer les ombres des corps, la Perspective, etc., a réuni les principes de ces applications, les a généralisés, et en a formé un corps de science auquel il a donné le nom de *Géométrie descriptive*.

On peut la définir ainsi : *C'est la science qui enseigne les moyens de représenter avec exactitude les grandeurs géométriques, et à faire graphiquement sur ces grandeurs toutes les opérations possibles.*

« C'est, comme l'a dit M. Monge, une langue nécessaire à
» l'homme de génie qui conçoit un projet, à ceux qui doivent en
» diriger l'exécution, et aux artistes qui doivent eux-mêmes en
» exécuter les différentes parties. »

Elle a d'abord été enseignée à l'École normale, ensuite à l'École polytechnique. Le savant auquel nous la devons, l'exposa de cette manière simple, naturelle et féconde, qui caractérisait son génie, et elle se répandit en Europe avec rapidité.

Les leçons de M. Monge, publiées d'abord dans le Recueil des séances de l'École normale, et successivement réimprimées par les soins de M. Hachette avec un supplément, et par M. Brisson avec des additions importantes, ne donnaient pas malheureuse-

ment un Traité complet de Géométrie descriptive. J'ai osé entreprendre ce Traité, et soutenu par le sentiment de son utilité et par les conseils de plusieurs de mes compagnons d'étude, la longueur du travail et la pénible exécution des figures ne m'ont point rebuté. Je serai heureux si mes efforts sont utiles à l'instruction des jeunes gens.

Je me suis particulièrement proposé de mettre la science à la portée des personnes qui se destinent à la pratique des arts dans lesquels on emploie la règle et le compas. C'est une tâche dont M. Monge a montré toute l'utilité. Depuis qu'il a écrit, l'École polytechnique a propagé l'étude des sciences exactes; les heureux résultats qu'il appelait se sont en grande partie réalisés; nos arts se sont perfectionnés rapidement; mais les connaissances théoriques ne sont pas encore, à beaucoup près, suffisamment popularisées.

Un de nos savans les plus distingués, M. Ch. Dupin, dont le nom reviendra souvent dans cet Ouvrage, indique, comme une cause remarquable des succès manufacturiers de l'Angleterre, les soins qu'on donne à l'instruction des ouvriers anglais (*). Effectivement les découvertes pratiques ne peuvent guère être faites que par les hommes qui manient les instrumens d'exécution.

Ces hommes, en France, sont habiles et intelligens; il faut donc, comme l'a dit M. Monge, *diriger leur instruction vers la connaissance des objets qui exigent de l'exactitude*.

C'est par là que nous parviendrons à donner à nos produits, pour un modique prix, des qualités qui les fassent rechercher; et c'est le seul moyen d'établir entre nos manufactures, et celles de l'Angleterre, une concurrence que l'industrie française réclame comme un de ses premiers besoins.

(*) Introduction d'un nouveau cours de Géométrie et de Mécanique, par Ch. Dupin. Paris, 1824.

D'après cela, j'ai dû persister dans le plan de donner la Géométrie descriptive sans emprunter le secours de l'Algèbre (*).

Pour atteindre ce but je devais exposer synthétiquement la théorie des sections coniques. Mon travail sur cet objet était déjà fort avancé, lorsque le *Traité des propriétés projectives* de M. Poncelet a paru : il m'a été d'une utilité que j'indiquerai dans la suite.

Je démontre dans la Note première, à la fin de l'ouvrage, pour les personnes qui n'ont pas étudié l'application de l'Algèbre à la Géométrie, les propriétés tout-à-fait élémentaires de l'ellipse, de l'hyperbole et de la parabole; et dans un chapitre des intersections de surfaces, je complète la théorie de ces lignes et fais voir leur identité avec les sections planes du cône à base circulaire.

Je pense qu'au moyen de ces additions, et de quelques autres améliorations qu'il serait surperflu d'énumérer, le lecteur qui ne connaîtra que la Géométrie élémentaire pourra facilement arriver à la connaissance de toutes les propriétés importantes de l'étendue.

J'ai eu soin de mettre en petit caractère toutes les parties difficiles qu'il n'est pas nécessaire d'étudier pour aller plus avant. Les personnes qui se proposeront d'enseigner la Géométrie descriptive, et celles qui, se trouvant arrêtées par quelques difficultés, auront besoin d'approfondir la matière, devront seules recourir à ces parties, dans lesquelles j'ai tâché d'éclaircir tout ce que la science présente d'embarrassant.

Quant aux lecteurs qui se destinent aux arts, ils ne sauraient arriver trop vite aux applications, et ils devront éviter les détails didactiques qui ne seraient pas indispensables à l'intelligence des

(*) Les Traités de la *Coupe des pierres* et de la *Charpente*, dont je m'occupe, et le *Traité de la Science du Dessin*, publié en 1821, sont conçus dans les mêmes vues.

parties du texte imprimées en gros caractère : ces détails leur prendraient un temps qu'ils emploieront plus utilement à former leur goût par l'étude du Dessin, et à acquérir des idées justes en *Physique*, en *Chimie*, en *Mécanique*, en *Économie industrielle*, etc.

Les démonstrations étrangères à l'objet principal de la science, les éclaircissemens, les observations pratiques, etc., sont rejetés dans les Notes qui terminent ce Traité.

Il est divisé en livres et en chapitres, de la manière suivante :

LIVRE I. PRÉLIMINAIRES.

LIVRE II. SURFACES COURBES.

LIVRE III. PLANS TANGENS.

LIVRE IV. INTERSECTIONS DE SURFACES.

LIVRE V. QUESTIONS DIVERSES.

LIVRE VI. COMPLÉMENT.

De la théorie des lignes courbes et des surfaces courbes.

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE.

LIVRE PREMIER.

PRÉLIMINAIRES.

CHAPITRE PREMIER.

Notions fondamentales.

1. On appelle *projection orthogonale* d'un point sur un plan, le pied de la perpendiculaire abaissée du point sur le plan. Ainsi, en menant par un point A une droite AB perpendiculaire au plan MNO, le pied B de cette perpendiculaire sera la projection du point A sur le plan de projection MNO. Pl. 1. Fig. 1.

2. Nous appellerons la ligne AB qui sert à déterminer la projection B du point A, *ligne* ou *droite projetante* du point A.

3. Si des points M, N, P, Q..., d'une ligne quelconque, on abaisse des perpendiculaires MM′, NN′, PP′, QQ′..., sur un plan de projection XYZ, la suite des pieds M′, N′, P′, Q′..., de ces perpendiculaires, formera sur le plan XYZ, une courbe particulière M′N′P′Q′..., qui sera ce qu'on appelle *la projection orthogonale* de la ligne MNPQ... Fig. 2.

4. Si la ligne donnée MNPQ... est une ligne droite, les perpendiculaires MM′, NN′, PP′, QQ′, etc., abaissées de ses différens points sur le plan de projection XYZ seront dans un même plan, passant par MQ, et Fig. 3.

Pl. 1. Fig. 3. perpendiculaire au plan XYZ. Donc, les pieds de ces perpendiculaires seront sur l'intersection M'Q' de deux plans, c'est-à-dire sur une ligne droite; donc la projection orthogonale M'Q' d'une droite, est elle-même une ligne droite.

Une droite étant déterminée lorsqu'on connaît deux de ses points, il suffira d'obtenir les projections M' et Q' de deux points M et Q de la droite MQ, pour construire la projection M'Q' de cette droite.

Et puisque le plan MQQ'M' est perpendiculaire au plan de projection XYZ, on pourra considérer la projection M'Q' de MQ comme l'intersection du plan de projection avec un second plan MQQ'M', mené par MQ perpendiculairement à XYZ.

5. Le plan MQQ'M' qui passe par une droite MQ, et qui est perpendiculaire à un plan de projection XYZ, est ce qu'on appelle le *plan projetant* de cette droite.

Fig. 2. 6. Les surfaces qui sont formées par des droites MM', NN', PP',QQ'..., abaissées des points d'une courbe MNPQ... perpendiculairement à un plan de projection XYZ, sont appelées *surfaces projetantes*, à cause de leur analogie avec les droites projetantes et avec les plans projetans (*).

Il est clair que la projection M'N'P'Q'... d'une ligne courbe MNPQ..., n'est autre chose que l'intersection du plan de projection XYZ avec la surface projetante MNPQ...Q'P'N'M', menée perpendiculairement au plan XYZ par la courbe MNPQ...

7. Ainsi que l'introduction a dû le faire apercevoir, on peut, en général, opérer sur les grandeurs géométriques au moyen de deux plans rectangulaires de projection. Dans les arts, l'un de ces plans est horizontal, et l'autre vertical; en sorte que les lignes projetantes qui correspondent à la projection horizontale, ont une situation verticale, et que les lignes projetantes relatives à la projection verticale, sont des horizontales.

De là est résulté l'usage de considérer toujours l'un des plans de projection comme horizontal, et l'autre comme vertical. Cet usage est très avantageux, parce qu'au moyen d'une supposition toute simple, il fixe les idées sur des dispositions principales dont tout le monde a le sentiment.

Quels que soient donc deux plans rectangulaires de projection, nous nommerons l'un, et ce sera d'ordinaire celui dont l'emploi sera le plus

(*) On verra par la suite (168) que les surfaces projetantes appartiennent à la famille des surfaces cylindriques.

remarquable, *plan horizontal*, et nous donnerons à l'autre le nom de *plan vertical*. Les lignes perpendiculaires au premier s'appelleront conséquemment des *lignes verticales*, et celles qui lui seront parallèles seront des *horizontales*.

8. La ligne d'intersection des deux plans de projection s'appellera *ligne de terre* (*).

9. Nous ne donnerons aux projections l'épithète d'orthogonales que lorsqu'il s'agira de les distinguer des *projections obliques*.

Pour donner une idée claire de ces dernières, concevons qu'on ait construit sur un plan les projections orthogonales d'un point, d'une droite et d'une ligne courbe, et imaginons que l'on prolonge la ligne projetante du point, le plan projetant de la droite, et la surface projetante de la courbe, jusqu'à leurs intersections avec un plan incliné connu : ces intersections seront sur ce plan, les projections obliques du point, de la droite et de la courbe en question.

On n'a recours aux projections obliques, et aux plans de projection obliques entre eux, que lorsqu'il en résulte quelque simplification d'opération tout-à-fait évidente. D'après cela, nous nous occuperons uniquement des projections orthogonales faites sur des plans rectangulaires (**).

10. Cela posé, passons à l'usage des plans de projection, et montrons d'abord comment on réunit le plan vertical au plan horizontal, par un rabattement fait autour de la ligne de terre.

Soient VUTS et PQRO deux plans rectangulaires quelconques de projection, et supposons que l'on prenne le premier pour plan horizontal, et le dernier pour plan vertical. Pour pouvoir opérer sur le système de ces plans, on imagine que le plan vertical PQRO tourne autour de leur intersection commune MN, et qu'il vient coïncider avec le plan horizontal. Il est clair, en supposant que les figures MNTU, MNOP, MNSV, MNRQ, soient quatre rectangles égaux, qu'après le mouvement, la partie supérieure MNRQ du plan vertical se trouvera confondue avec le rectangle MNSV, et la partie inférieure MNOP, du même plan vertical, avec le rectangle MNTU. Pl. 1. Fig. 4.

(*) Ce nom vient de ce que, dans les applications où l'on prend le sol pour plan horizontal, l'intersection des deux plans de projection représente le terrain sur le plan vertical.

(**) Lorsqu'on connaît l'emploi des projections orthogonales, on connaît aussi celui des projections obliques. On verra, nos 613 et 614, un exemple de l'emploi de ces dernières.

1.

Pl. 1. Fig. 4 et 5. Construisons sur un plan le rectangle *vuts* égal à VUTS, et menons la droite *mn* de manière que les parallélogrammes *mntu*, *mnsv*, soient égaux entre eux. On pourra remplacer par la figure *vuts*, le système des deux plans de projection VUTS, PQRO (supposé réduit au seul plan PQRO, par le rabattement du plan vertical sur le plan horizontal), pourvu que l'on conçoive perpétuellement, que l'un des deux plans de projection soit relevé perpendiculairement au plan *vuts*, au-dessus de la ligne de terre *mn*. Ainsi, quand on considérera le rectangle *mntu* comme un rectangle horizontal, on concevra le rectangle *mnsv* comme relevé perpendiculairement à la figure autour de la droite *mn*; et quand on considérera le rectangle *mnsv* comme vertical, c'est le rectangle *mntu* au contraire qui sera à son tour conçu comme relevé sur *mn* perpendiculairement au plan de la figure.

De plus, le plan unique *vuts* pourra remplir le même objet que les plans séparés VUTS, PQRO; car la ligne de terre *mn* réunira sur le plan *vuts* la projection horizontale et la projection verticale, tout aussi bien que si elles étaient dans des plans rectangulaires menés par cette ligne; et l'avantage de n'avoir qu'un plan rendra toutes les opérations faciles.

Montrons maintenant, comment on représentera sur ce plan, un point, une courbe et une droite.

Fig. 4. 11. Soit A un point quelconque situé entre les plans de projection MNTU, MNRQ, et concevons que l'on ait abaissé de ce point les lignes projetantes A*a*, A*b*, qui déterminent la projection horizontale *a* du point A et sa projection verticale *b*. Il est clair que ces deux projections définiront la position du point A : en effet, la première exprimera qu'il est sur la verticale *a*A, la seconde sur l'horizontale *b*A; d'où l'on voit qu'il sera nécessairement la commune intersection de *a*A et *b*A.

Cela posé, rabattons le plan MNRQ en MNSV; le point *b* viendra s'abattre en *a'*, et les deux points *a* et *a'* définiront la position du point A; car, connaissant la ligne de terre MN, il ne s'agira que de relever le plan MNSV en MNRQ, pour ramener le point *a'* en *b*, et trouver conséquemment la position du point A.

Nous devons conclure de là, que lorsqu'on connaît la projection horizontale *a* d'un point A, et le rabattement *a'* de sa projection verticale *b*, rabattement que l'on nomme aussi la *projection verticale* du point A, on connaît la position de ce point par rapport aux plans de projection.

12. Et comme le plan des deux lignes projetantes A*a*, A*b*, est perpendiculaire aux deux plans de projection, et par conséquent à leur intersec-

tion commune, il coupe nécessairement ces plans, suivant deux droites *ah*, *bh*, perpendiculaires en un même point *h* de la ligne de terre MN. Or, lorsqu'on rabat le plan MNRQ en MNSV, la ligne *bh* vient en *a'h*; l'angle *bh*M ne varie pas dans le mouvement; donc les angles *a'h*M, *ah*M, sont droits; donc la ligne *aha'* est une ligne droite : donc enfin, après la réunion des deux plans de projection en un seul plan, la droite *aa'* qui joint les deux projections *a* et *a'* d'un même point, est perpendiculaire à la ligne de terre MN. Pl. 1. Fig. 4.

13. Les lignes *a'h*, *bh*, étant égales entre elles et égales à la hauteur A*a* du point A au-dessus du plan horizontal, on peut remarquer que les projections *a* et *a'* donnent d'une manière fort simple la position du point A auquel elles appartiennent. En effet, la projection horizontale *a* détermine la verticale *a*A qui contient ce point; et la projection verticale *a'*, par sa distance *a'h*, à la ligne de terre, indique à quelle hauteur, au-dessus du plan horizontal, est situé le point A sur la verticale *a*A.

14. D'après ce qui précède, si l'on mène sur le plan *vuts* une ligne quelconque PP', perpendiculaire à *mn*, et qu'on prenne sur cette ligne un point P que l'on concevra sur le plan horizontal, et un point P' que l'on concevra sur le point vertical, ces deux points représenteront un point de l'espace dont ils seront les projections, et qui sera situé dans la verticale passant par le point P, à une hauteur au-dessus du plan horizontal égale à *p*P'. Fig. 5.

15. Un point étant, comme on le voit, rigoureusement représenté par ses deux projections, il est naturel, pour le désigner, de les nommer l'une et l'autre. Nous indiquerons en conséquence par (P, P') le point dont P et P' sont les projections, et nous mettrons toujours entre parenthèses la projection horizontale P la première.

Lorsqu'un point P sera situé dans l'un des plans de projection, il sera lui-même sa projection sur ce plan; il aura sa deuxième projection *p* sur la ligne de terre, et nous l'appellerons simplement le point P. Cependant, lorsque la clarté du discours l'exigera, nous le désignerons comme à l'ordinaire au moyen de ses deux projections.

16. Sachant représenter un point, la manière de représenter une courbe ne donnera lieu à aucune difficulté; car les deux projections de cette courbe détermineront complètement sa forme et sa position. Pour le prouver, soit ABC la projection horizontale d'une courbe, et A'B'C' sa projection verticale rabattue sur le plan horizontal. Il est clair que si l'on mène per-

Pl. I. Fig. 5. pendiculairement à la ligne de terre une droite quelconque BB′, elle déterminera en général sur les lignes ABC, A′B′C′, deux points B et B′, qui seront les deux projections d'un point (B, B′) de la courbe en question. Or, on connaîtra la position de ce point dans l'espace, dès que la ligne BB′ sera menée. Si donc on fait varier la position de cette ligne, en la laissant toujours à angle droit sur *mn*, on connaîtra successivement les positions de tous les points de la courbe; donc la forme et la position de cette courbe sont exactement décrites par les projections ABC, A′B′C′.

17. Si l'on veut se figurer aisément la situation de cette même courbe, on imaginera par les différens points de la ligne ABC, des perpendiculaires au plan horizontal; ces perpendiculaires formeront une première surface projetante facile à concevoir : on imaginera pareillement une seconde surface projetante menée par la ligne A′B′C′; on concevra que le plan vertical soit relevé perpendiculairement au plan horizontal autour de la ligne de terre, et les deux surfaces projetantes devant se couper suivant la courbe dont il s'agit, on aura, par l'idée des formes de ces surfaces, celle de la situation de cette courbe.

18. Pour désigner une ligne courbe, nous écrirons ses projections, en commençant par la projection horizontale, entre les branches d'une parenthèse : ainsi celle dont nous venons de nous occuper s'appellera la courbe (ABC, A′B′C′).

Lorsqu'une courbe sera dans l'un des plans de projection, elle sera elle-même sa projection sur ce plan, elle aura pour seconde projection la ligne de terre, et nous nous contenterons ordinairement pour la désigner de la nommer elle-même.

Fig. 4. 19. Supposons maintenant qu'il s'agisse de représenter une droite quelconque CD, située comme on voudra par rapport aux plans de projection. On mènera pour cela par cette droite deux plans CD*dc*, CD*fe*, respectivement perpendiculaires aux plans MNTU, MNRQ; ils détermineront sur ces plans les deux projections *cd*, *ef*, et lorsqu'on rabattra le plan vertical sur le plan horizontal, la dernière *ef*, viendra s'abattre en *c′d′*. Or les deux projections *cd*, *c′d′*, détermineront la droite CD; car si l'on élève par la première un plan projetant vertical *c*CD*d*, et qu'ayant ramené la seconde en *ef*, on mène par cette droite *ef* le plan projetant *e*CD*f*, l'intersection de ces deux plans sera la droite CD.

Fig. 6. Il suit de là, que si l'on trace sur un plan *xyzw*, une droite *mn*; que

l'on prenne cette droite pour intersection d'un second plan perpendiculaire au premier; que l'on trace deux droites PQ, P'Q', sur le plan *xyzw*; que l'on suppose la première sur le plan même de la figure, et que l'on imagine que la seconde soit sur le rabattemeet du plan perpendiculaire, les lignes PQ, P'Q', représenteront une droite dont la position sera connue par rapport au plan *xyzw*. Pl. 1. Fig. 6.

Si l'on veut avoir un point de cette ligne, on mènera une droite quelconque PP' perpendiculaire à la ligne de terre; elle coupera les projections PQ, P'Q', en deux points P et P', qui détermineront un point (P, P'), situé dans la verticale menée par le point P, à une hauteur *p*P' au-dessus du plan horizontal, et ce point sera sur la droite en question.

20. En déterminant ainsi plusieurs points de cette droite, on se ferait l'idée de sa position; mais il est évident que le moyen le plus simple et le plus naturel qu'il convienne d'employer pour se la figurer dans l'espace, c'est de concevoir les deux plans projetans dont elle est l'intersection et qui correspondent à ses projections.

21. Nous emploierons, pour désigner une ligne droite, la même notation que nous employons pour désigner les points et les lignes courbes. Ainsi PQ et P'Q' étant les projections de cette droite, nous l'appellerons la droite (PQ, P'Q'). Nous aurons soin d'écrire toujours la projection horizontale PQ la première entre parenthèses.

Lorsqu'une droite sera située dans l'un des plans de projection, elle aura la ligne de terre pour seconde projection, et nous l'indiquerons tout simplement en la nommant elle-même.

22. Connaissant la manière de représenter un point et celle de représenter une droite, il s'ensuit plusieurs moyens de définir la position d'un plan; car on peut se le donner par le système de trois points, par une droite et un point, ou par le système de deux droites. Mais aucun de ces moyens, considérés dans cet état de généralité, ne convient pour représenter un plan. Le système de trois points est compliqué et ne donne pas immédiatement l'idée du plan que ces points déterminent. Le système d'une droite et d'un point a les mêmes inconvéniens. Quant au système de deux droites, il est en général encore plus compliqué que les précédens, puisque la représentation de ces droites exige ordinairement l'emploi de quatre projections; mais, en le simplifiant, il devient le plus commode et le plus naturel qu'on puisse imaginer.

En effet, on peut prendre pour les deux droites qui déterminent un

Pl. 1. Fig. 6. plan, celles AB, BC, suivant lesquelles il coupe les deux plans de projection. Alors ces deux droites suffisent à leur propre représentation, et en concevant le plan vertical relevé au-dessus de *mn*, elles donnent immédiatement l'idée du plan auquel elles appartiennent.

23. Les intersections AB, BC, d'un plan avec les plans de projection, sont appelées ses *traces*.

24. En général, toute intersection d'une ligne ou d'une surface avec les plans de projection, prend le nom de *trace*. Les traces qui sont situées sur le plan horizontal s'appellent des *traces horizontales;* et celles qui sont situées sur le plan vertical, s'appellent des *traces verticales*.

Il est évident que toutes les traces horizontales possibles se projettent sur le plan vertical suivant la ligne de terre. De même, toutes les traces verticales ont la ligne de terre pour projection horizontale.

25. D'après cela, une droite AB étant l'intersection d'un plan donné avec le plan horizontal de projection, cette droite est ce qu'on appelle la *trace horizontale* du plan donné; elle est elle-même sa projection horizontale, et elle a pour projection verticale la ligne de terre *mn*. De même, l'intersection BC du plan donné et du plan vertical est ce qu'on nomme la *trace verticale* du plan donné. Cette trace est elle-même sa projection verticale, et la ligne de terre *mn* est sa projection horizontale.

26. Comme on l'a déjà dit, les deux traces AB, BC, d'un plan quelconque, le déterminent complètement; et il est clair qu'elles se coupent en un même point B de la ligne de terre.

27. Quand nous voudrons désigner un plan, nous le nommerons, au moyen de ses traces écrites entre parenthèses, la trace horizontale la première. Ainsi, le plan dont on vient de s'occuper, s'appellera le plan (AB, BC).

Lorsqu'un plan sera perpendiculaire à l'un des plans de projection, sa trace sur ce plan suffira pour le déterminer, et nous la nommerons souvent seule quand il faudra le désigner. D'après cela, le plan projetant vertical de la droite (PQ, P'Q'), s'appellera simplement le plan PQ; et le plan projetant perpendiculaire au plan vertical, et appartenant à la même droite, s'appellera le plan P'Q'.

28. Concluons donc de ce qui précède, qu'au moyen d'une surface plane sur laquelle on trace une droite, que l'on conçoit être la charnière d'un plan perpendiculaire à cette surface et rabattu sur elle, on représente rigoureusement, et d'une manière très simple, un point, une droite [pourvu

qu'elle ne soit pas perpendiculaire à la ligne de terre (34)], une courbe et un plan quelconques (*).

29. En général, les projections horizontales se font sur la partie antérieure MNTU ou *mntu* du plan horizontal, et les projections verticales sur la partie supérieure MNRQ du plan vertical, laquelle est rabattue sur le plan horizontal en MNSV ou *mnsv*. Pl. 1. Fig. 4 et 5.

Mais cela suppose que les grandeurs que l'on représente soient dans l'angle UMQRNT des deux plans de projection, et c'est ce qui n'est pas toujours possible : car les données d'une question, les grandeurs qui la résolvent et celles qui concourent à sa résolution, par leur nature ou par le choix des plans de projection, peuvent pénétrer dans les quatre angles de ces plans. Alors on est obligé d'employer avec les parties antérieure et supérieure de ces mêmes plans, la partie postérieure MNSV du plan horizontal et la partie inférieure MNOP du plan vertical.

30. Cela exige qu'on ait toujours dans la pensée l'idée bien nette des positions des quatre parties MNTU, MNRQ, MNSV, MNOP, des deux plans de projection, par rapport à la feuille de dessin dont on se sert. Or, la partie MNTU, que nous nommons la partie antérieure du plan horizontal, est toujours en *mntu*, en-deçà de la ligne de terre, vers le dessinateur. La partie supérieure MNRQ du plan vertical, est toujours en *mnsv* au-delà de la ligne de terre. La partie postérieure MNSV du plan horizontal coïncide en *mnsv* avec la partie supérieure du plan vertical; toutefois on l'imagine au-dessous de cette dernière, parce qu'en se rabattant autour de MN, la figure MNRQ s'applique nécessairement sur le dessus de MNSV. Enfin, la partie inférieure MNOP du plan vertical coïncide en *mntu* avec la partie antérieure du plan horizontal; mais on la conçoit au-dessous de cette dernière, parce qu'elle a dû venir s'appliquer en dessous de MNTU, par son mouvement autour de MN.

Il peut sembler indifférent que deux plans qui se confondent soient censés avoir leurs parties au-dessus ou au-dessous les unes des autres; mais à mesure que nous avancerons, on verra que la manière de les imaginer réunis qui vient d'être indiquée, conduit à des distinctions de parties vues et de parties cachées, qui sont d'une grande utilité pour l'intelligence des projections (50 — 56). Au reste, cette manière de concevoir la réunion des

(*) Il y aurait exception si le plan à représenter passait par la ligne de terre, et si la courbe à représenter était dans un plan perpendiculaire à cette ligne.

plans de projection, comme si ces plans étaient des lames solides infiniment minces, qui se fussent appliquées l'une sur l'autre par la rotation de l'une sur une charnière qui leur serait commune, est tout-à-fait naturelle.

31. Jusqu'ici nous avons figuré les plans de projection bornés à des contours VUTS, PQRO, *vuts*, *xyzw*, etc.; nous devons prévenir que c'est uniquement pour pouvoir les nommer et les dessiner. L'idée qu'on doit attacher à ces plans, c'est qu'ils sont indéfinis.

Pl. 1. Fig. 4, 5 et 6.

Fig. 6. On doit imaginer de même que les projections PQ, P'Q', d'une droite, et les traces AB, BC, d'un plan, de quelque manière qu'elles soient placées sur les plans de projection, soient indéfiniment prolongées par leurs deux extrémités. En général, toutes les grandeurs que l'on considère dans la Géométrie descriptive sont conçues indéfinies, et c'est un caractère qui distingue les conceptions de cette science, de celles de la Géométrie élémentaire, dans laquelle on n'examine ordinairement que les propriétés de parties finies de l'étendue.

32. Ce serait ici le lieu de parler de la représentation des surfaces courbes; mais nous sommes encore trop peu familiarisés avec le mécanisme des projections pour entamer cet objet : il sera traité livre II.

Avant de passer à la résolution de quelques problèmes importans, qui vont faire la matière du second chapitre des préliminaires, occupons-nous de la représentation d'une droite et d'un plan dans leurs positions les plus remarquables.

33. S'il s'agit d'une droite, elle pourra être perpendiculaire au plan horizontal, perpendiculaire au plan vertical, parallèle à ce plan, parallèle au plan horizontal, perpendiculaire à la ligne de terre, ou parallèle à cette ligne.

Si elle est perpendiculaire au plan horizontal, elle se projettera sur ce plan suivant un point A, et sur le plan vertical suivant une droite A'A'', perpendiculaire à la ligne de terre MN. Si elle est perpendiculaire au plan vertical, sa projection verticale sera un point P'', et sa projection horizontale une droite PP', perpendiculaire à MN. On nommera la première (A, A'A''), et la seconde (PP', P'').

Pl. 2. Fig. 1.

Si elle est parallèle à l'un des plans de projection, elle se projettera sur l'autre suivant une parallèle à la ligne de terre : ainsi, la droite (AB, A'B'), telle que la projection horizontale AB soit parallèle à MN, est parallèle au plan vertical.

Fig. 2.

La droite (CD, C'D'), telle que la projection verticale C'D' soit parallèle à MN, est une droite parallèle au plan horizontal. Pl. 2. Fig. 3.

Nous ferons observer que l'angle de la droite (AB, A'B') ou (cD, C'D'), avec le plan de projection auquel elle n'est pas parallèle, se mesure par l'angle de la ligne de terre avec la projection correspondante A'B' ou CD. Ainsi, la première de ces droites ferait un angle de 45 degrés avec le plan horizontal, et la seconde avec le plan vertical, si les angles de A'B' et MN, CD et MN étaient de 45 degrés. Fig. 2 et 3.

34. Quant à la droite perpendiculaire en un point R de la ligne de terre, il est clair qu'elle aura ses projections PR, RQ, perpendiculaires à MN, et dans le prolongement l'une de l'autre; car les plans projetans PR, RQ, la contiendront nécessairement : mais comme ces plans se confondent, leur intersection est indéterminée, ainsi que la droite dont il s'agit. Et cela doit être, puisque rien jusqu'ici ne distingue cette droite de toute autre, qui serait perpendiculaire au même point R de MN. Fig. 4.

Si donc on veut représenter une droite perpendiculaire en R à la ligne de terre, il faudra recourir à un autre système de plans de projection; et, parmi une infinité d'autres que l'on pourrait choisir, il sera tout naturel de conserver le plan horizontal, et de remplacer le plan vertical MN par le plan vertical PR. Lorsqu'on rabattra ce dernier plan en PRMT, la droite en question viendra prendre une position RT, telle que l'angle PRT soit égal à celui qu'elle forme avec le plan horizontal, et cette droite, (PR, RT), sera entièrement déterminée.

On remarquera en passant, que le système de plans de projection qui se croisent à angle droit suivant MN est également insuffisant pour la représentation de toute autre droite, située dans le plan PQ perpendiculaire à MN; et qu'on supplée de même tout simplement à cet inconvénient par le moyen d'un second plan vertical, tel que PR.

35. Enfin, si une droite (AB, A'B'), est à la fois parallèle aux deux plans de projection, elle se projettera sur chacun d'eux suivant des parallèles AB, A'B', à la ligne de terre. Fig. 5.

36. Considérons maintenant un plan : il pourra être perpendiculaire ou parallèle à l'un des plans de projection, perpendiculaire à la fois à ces deux plans, c'est-à-dire perpendiculaire à la ligne de terre, ou parallèle à cette ligne.

S'il est perpendiculaire au plan horizontal, il coupera le plan vertical suivant une perpendiculaire à la ligne de terre; ainsi, sa trace verticale

P. 2. Fig. 6. BC sera perpendiculaire à MN. Il est clair que sa trace horizontale AB fera avec la ligne de terre un angle ABN, qui sera celui du plan (AB, BC) avec le plan vertical.

Fig. 7. De même, un plan (AB, BC), perpendiculaire au plan vertical, aura sa trace AB perpendiculaire à MN, et fera avec le plan horizontal un angle NBC.

Si le plan est parallèle à l'un des plans de projection, il ne le coupera pas, et il aura pour trace sur l'autre plan de projection une droite parallèle à la ligne de terre. Ainsi, AB et MN étant des droites parallèles situées dans le plan horizontal, le plan AB sera un plan perpendiculaire au plan horizontal, et parallèle au plan vertical MN.

Fig. 9. De même, PQ étant une parallèle à MN, tracée sur le plan vertical, le plan PQ sera un plan perpendiculaire au plan vertical et parallèle au plan horizontal.

S'il s'agit d'un plan à la fois perpendiculaire aux deux plans de projection, c'est-à-dire perpendiculaire à la ligne de terre, sa trace horizontale et sa trace verticale se confondront en une même ligne PQ perpendiculaire à MN.

Fig. 5. Enfin, un plan parallèle à la ligne de terre aura ses traces AB, A'B', parallèles à MN.

CHAPITRE II.

Résolution des principaux problèmes que l'on peut proposer sur le point, la ligne droite et le plan, considérés par rapport aux plans de projection. Conventions sur la manière de mettre au trait les lignes des épures, selon leur objet.

37. SACHANT représenter un point, une droite, et un plan quelconques, les premières questions qui se présentent à l'esprit, sont celles qui ont pour objet la construction des points, des lignes, et des angles, que les grandeurs décrites déterminent avec les plans de projection qui servent à les décrire.

D'après cela, nous allons procéder à l'examen et à la résolution de ces

questions, en nous occupant d'abord du point, ensuite de la ligne droite, et enfin du plan.

Soit MN la ligne de terre de deux plans rectangulaires de projection. La partie antérieure du plan horizontal sera en-deçà de MN, et la partie supérieure du plan vertical sera au-delà. Les parties postérieure du plan horizontal, et inférieure du plan vertical, seront d'ailleurs placées comme on l'a précédemment indiqué (30). Pl. 3. Fig. 1.

38. Cela posé, considérons un point (P,P′) rapporté à ces deux plans par les projections P et P′. Ce point sera situé dans la verticale qui passe par la projection horizontale P, à une hauteur au-dessus du plan horizontal égale à *p*P′ (14); ou, ce qui revient au même, il sera dans l'horizontale qui passe par le point P′, en-deçà du plan vertical de la longueur *p*P. C'est-à-dire que ce point sera dans le plan (P*p*, *p*P′), en avant du plan vertical de la longueur *p*P, et au-dessus du plan horizontal de la longueur *p*P′.

Si le point donné avait sa projection horizontale en Q, sur la partie antérieure du plan horizontal, et sa projection verticale en Q′, sur la partie inférieure du plan vertical, il serait en avant du plan vertical de la longueur *q*Q, et au-dessous du plan horizontal de la longueur *q*Q′.

S'il avait sa projection horizontale en R, sur la partie postérieure du plan horizontal, et sa projection verticale en R′, il serait en arrière du plan vertical de la longueur *r*R, et au-dessus du plan horizontal de la grandeur *r*R′.

Enfin, si le point donné avait sa projection horizontale en S, sur la partie postérieure du plan horizontal, et sa projection verticale en S′, sur la partie inférieure du plan vertical, il serait en arrière du plan vertical de la longueur *s*S, et au-dessous du plan horizontal de la hauteur *s*S′.

Quelle que soit donc la disposition des deux projections d'un point (P,P′), sur une ligne PP′ perpendiculaire à la ligne de terre, il suffira qu'on sache que le point P est la projection horizontale, et le point P′ la projection verticale, pour qu'on connaisse la situation de ce point dans l'un des quatre angles des deux plans de projection. Dans tous les cas, la distance de ce point au plan horizontal est la perpendiculaire *p*P′, abaissée de la projection verticale P′ sur la ligne de terre MN; et sa distance au plan vertical est la perpendiculaire *p*P, abaissée de sa projection horizontale P sur la même ligne MN.

39. Or, il n'y a pas d'autre question remarquable à proposer entre un point (P, P′) et les plans de projection, que celles que l'on vient de résoudre, et qui consistent à trouver ses distances à ces plans et sa position

entre eux. Considérons donc maintenant une ligne droite située comme on voudra par rapport aux plans de projection. Il y aura trois questions principales à résoudre sur cette droite : 1°. *trouver les points où elle perce les deux plans de projection*, c'est-à-dire *ses traces horizontale et verticale*; 2°. *trouver ses angles avec ces plans*; 3°. enfin, *trouver la distance, mesurée sur elle-même, d'une de ses traces à l'autre*.

Fig. 2. 40. Pour résoudre la première, prenons une droite quelconque (PQ,P'Q'), et cherchons d'abord sa trace horizontale.

D'après ce qu'on a vu précédemment (24), les traces horizontales se projettent verticalement sur la ligne de terre; donc le point où la droite (PQ, P'Q') perce le plan horizontal, a sa projection verticale sur MN. Mais cette projection est aussi sur P'Q'; donc elle est à l'intersection A' de la projection verticale de la droite donnée et de MN. On sait aussi que les deux projections d'un point sont sur une même droite perpendiculaire à la ligne de terre (12); donc si l'on élève par le point A' la droite A'A, à angle droit sur MN, elle contiendra la projection horizontale de la trace horizontale cherchée, c'est-à-dire cette trace elle-même. Et comme cette projection doit se trouver sur AB, elle sera nécessairement en A, et la trace cherchée sera le point (A, A'), ou pour le nommer plus simplement, le point A.

Ce point divise la droite donnée en deux parties : l'une, dont les points se projettent verticalement sur A'Q' au-dessus de la ligne de terre, est évidemment située au-dessus du plan horizontal; et l'autre, dont les points se projettent verticalement sur A'D, au-dessous de MN, est évidemment au-dessous du plan horizontal.

Pour avoir l'intersection de la droite donnée et du plan vertical, on prolongera jusqu'à la ligne de terre la projection horizontale PQ de cette droite; par le point B où PQ et MN se rencontreront, on élèvera une droite BB' perpendiculaire à MN; elle coupera en B' la projection P'Q', et le point (B, B') de (PQ, P'Q'), sera le point cherché : car sa projection horizontale B étant sur la ligne de terre, il sera nécessairement dans le plan vertical.

Si, au lieu de la droite que l'on vient de prendre pour exemple, on
Fig. 3. se donnait la droite (AB, A'B'); il est évident qu'elle percerait le plan horizontal en (*m*, *m'*), c'est-à-dire sur la partie postérieure de ce plan, et le plan vertical en (A, A').

41. Nous ferons observer en passant que les constructions que l'on vient d'indiquer pour avoir la trace verticale d'une droite, sont absolument

analogues à celles qu'il faut faire pour avoir sa trace horizontale. Cela doit être ainsi, car les deux plans de projection étant établis de la même manière sur le dessin, et la droite donnée étant projetée aussi de la même manière sur chacun de ces plans, il n'y a pas de raison pour que les opérations à faire pour avoir la trace horizontale, diffèrent de celles qu'il faut faire pour avoir la trace verticale.

Cette similitude de constructions est remarquable, et il est évident qu'elle doit se trouver toutes les fois que les données d'une question sont exprimées de la même manière sur les deux plans de projection. Le problème qui suit va en donner un second exemple.

42. *On demande les angles d'une droite donnée* (AB, A'B'), *avec les plans de projection.* Occupons-nous d'abord de l'angle de cette droite avec le plan horizontal. On remarquera que cet angle est celui de la droite elle-même avec sa projection AB; d'où il suit que si l'on fait tourner autour de AB le plan projetant de la droite donnée, lequel est perpendiculaire au plan horizontal, pour l'abattre sur ce dernier plan, le rabattement de la droite (AB, A'B') fera l'angle cherché avec la ligne AB. D'après cela, il ne s'agit plus que d'obtenir ce rabattement. Or, comme c'est une ligne droite, il suffira d'avoir deux points de cette droite pour pouvoir le construire. Cherchons donc le rabattement des deux points quelconques (B, B') et (D, D') de (AB, A'B'). Il est clair que dans le mouvement que prendra le plan projetant pour se rabattre, le point (B, B') décrira un cercle vertical dont le centre sera en B, dont le plan *b*B sera perpendiculaire à la charnière AB, et dont le rayon sera la hauteur *b'*B' du point générateur (B, B') au-dessus du plan horizontal; donc ce point viendra s'abattre en *b* sur la ligne *b*B, à une distance de AB égale à *b'*B'. On construira pareillement le rabattement de (D, D'); pour cela, on portera *d'*D' de D en *d* sur la droite D*d*, perpendiculaire à AD, et le point *d* sera ce rabattement. Menant donc par les points *b* et *d* une droite indéfinie, l'angle *bm*B, qu'elle formera avec la droite AB, sera l'angle cherché. Pl. 3. Fig. 3.

On obtiendra, par des opérations analogues, faites sur la projection A'B', l'angle de la même droite (AB, A'B') avec le plan vertical.

43. S'il s'agit d'avoir la longueur de la portion de (AB, A'B') qui est comprise entre les plans de projection, il faudra d'abord chercher les points où cette droite et ces plans se rencontrent, et l'on n'aura plus à construire que la longueur de la droite qui joindra ces points. Or, cette question peut être généralisée et posée ainsi : *Trouver la longueur d'une*

portion de droite comprise entre deux points connus. Supposons que cette portion de droite soit celle qui se termine aux deux points quelconques (B, B′) et (D, D′) de (AB, A′B′), il est clair qu'en construisant par le procédé du numéro précédent le rabattement *bd*, la partie de ce rabattement comprise entre les points *b* et *d* sera la longueur cherchée.

Pl. 3. Fig. 3.

44. Mais on peut arriver à la solution de cette question par des moyens plus directs. En effet, la longueur demandée (BD, B′D′) est l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont un côté est horizontal et l'autre vertical; or, le premier côté est égal à la projection BD de la portion de droite en question, et le second est la différence *o*B′ des verticales *b*′B′ et *d*′D′ qui correspondent aux extrémités de (BD, B′D′) : donc si l'on mène l'horizontale *o*D′, et qu'on porte BD de *o* en *n*, puis qu'on joigne B′ et *n*, B′*n* sera la longueur demandée.

45. Nous ferons remarquer que l'angle B′*no* du triangle rectangle B′*no*, est l'angle de la droite (BD, B′D′) avec le plan horizontal; d'où l'on voit que, soit que l'on opère par le moyen du rabattement *bd* ou par le moyen du triangle rectangle B′*no*, on obtient toujours à la fois la longueur d'une portion de la droite que l'on considère, et l'angle de cette droite avec le plan horizontal.

Si l'on avait opéré sur la portion de droite (A*m*, A′*m*′), on aurait trouvé pour l'hypoténuse d'un triangle analogue à B′*no*, une ligne égale à la grandeur *am* de la partie de (AB, A′B′) comprise entre les plans de projection; car les extrémités (A, A′) et (*m*, *m*′) de (A*m*, A′*m*′), sont évidemment les traces de la droite (AB, A′B′).

Ce qui précède montre que les questions que l'on peut proposer entre le point et la ligne droite, considérés par rapport aux plans de projection, se résolvent avec beaucoup de facilité. On va voir que les solutions de celles qui sont relatives au plan, se construisent aussi très facilement.

46. Parmi ces questions la plus remarquable est celle-ci : *Un plan étant donné, trouver ses angles avec les plans de projection*. Soit (AB, BC) le plan donné, et proposons-nous d'obtenir l'angle qu'il forme avec le plan vertical. Ces deux plans se coupent suivant la ligne BC, et nous savons que si l'on mène par un point quelconque C de cette ligne, un plan auxiliaire qui lui soit perpendiculaire, il coupera les deux plans dont elle est l'intersection, suivant deux droites qui feront entre elles l'angle cherché. Exécutons ces constructions. Le plan auxiliaire étant perpendiculaire à la ligne BC, il aura pour trace verticale la droite DC perpendiculaire à cette ligne.

Fig. 4.

De plus, ce plan sera perpendiculaire au plan vertical, donc sa trace horizontale sera la droite DA perpendiculaire à DB. Or, le plan (AD, DC) contient l'angle cherché, et cet angle est celui de la droite DC avec la droite qui joindrait les deux points (A, D), (F, C); car c'est évidemment suivant cette dernière droite que le plan (AD, DC) coupe le plan donné. Rabattons donc le plan auxiliaire (AD, DC) sur le plan horizontal, en le faisant tourner autour de sa trace AD; il est évident que la droite DC ne sortira pas du plan vertical, puisque la charnière AD est perpendiculaire à ce plan; donc elle aura son rabattement sur DB; donc si l'on porte DC de D en E, et que l'on mène AE, le triangle ADE sera le rabattement de celui dont les sommets sont A, D et C, et l'angle DEA sera l'angle cherché. Pl. 3. Fig. 1.

On construira par les mêmes moyens l'angle du plan donné avec le plan horizontal.

47. On peut encore se proposer cette question entre un plan (AB, BC) et les plans de projection : c'est de construire l'angle que font entre elles les traces AB, BC, de ce plan. Il est visible qu'il suffira, pour la résoudre, de rabattre le plan (AB, BC) sur l'un des plans de projection, en le faisant tourner autour de sa trace sur ce plan, et que l'angle de cette trace avec le rabattement de l'autre trace, sera l'angle cherché. Nous laisserons aux commençans le soin de faire les constructions.

48. Les solutions de ces premiers problèmes étant bien entendues, les questions qui peuvent être proposées entre les points, les droites et les plans, ne présenteront aucune difficulté. Le paragraphe suivant est consacré à celles de ces questions qui sont les plus intéressantes; mais avant de nous en occuper, il convient d'exposer sur le tracé des lignes dans les dessins, des conventions générales qui seront constamment observées par la suite.

49. Dans la Géométrie descriptive, toutes les figures où l'on emploie deux ou un plus grand nombre de plans de projection, s'appellent des *Épures*.

50. Les lignes qui les forment sont ordinairement très nombreuses, et il est souvent difficile de reconnaître ce qu'elles indiquent, quoique les diverses manières de les mettre au trait (voyez fig. 5, pl. 3) soient affectées chacune à un objet particulier.

Pour arriver aux conventions à faire sur la mise au trait des lignes, nous nous rappellerons qu'une projection n'est autre chose qu'une image, une vue, ou plus rigoureusement, une perspective (voyez l'Introduction), dont

le point de vue est à l'infini, sur une perpendiculaire au plan de projection. Il suit de là, premièrement, qu'il y a un point de vue particulier pour chaque projection, considérée comme une image ou une perspective des grandeurs qu'elle représente; secondement, que le point de vue de la projection horizontale est à l'infini au-dessus du plan horizontal, et que les rayons visuels qui correspondent à ce point sont verticaux; troisièmement, que le point de vue de la projection verticale est à l'infini en avant du plan vertical, et que les rayons visuels correspondans sont horizontaux et perpendiculaires au plan vertical (*).

51. Cela posé, lorsqu'un système de grandeurs est représenté au moyen de deux projections, ces grandeurs ont sur chaque projection des parties vues et des parties cachées. S'il s'agit, par exemple, d'un plan et d'une droite, la droite percera le plan en un point, et quelque projection que l'on considère, ce point la divisera en deux parties, l'une cachée par le plan, et l'autre vue. De plus, ce plan et cette droite auront des parties situées au-dessous du plan horizontal et derrière le plan vertical, et comme on suppose les plans de projection solides et opaques, ces parties seront aussi cachées.

52. Or, pour qu'une projection fasse image, il faut que les parties vues des grandeurs qu'elle est destinée à représenter, soient indiquées par les lignes les plus apparentes, et les parties cachées, au contraire, par les lignes qui s'aperçoivent le moins. On doit donc consacrer les *lignes pleines*, Pl. 3. Fig. 5. comme AB, aux premières, et les *lignes ponctuées*, comme CD, aux dernières.

Mais la détermination des parties vues et cachées des diverses lignes d'une épure est quelquefois une chose difficile. D'abord, chaque projection ayant son point de vue particulier, ce qui est vu sur l'une, souvent ne l'est pas sur l'autre; en sorte qu'il faut, pour déterminer ces parties, deux opérations séparées, l'une relative au plan horizontal, et l'autre relative au plan vertical. Ensuite, ces opérations exigent qu'on se rende parfaitement compte de la situation particulière des grandeurs, par rapport aux

(*) On pourrait également dire que le point de vue de la projection horizontale est à l'infini *au-dessous* du plan horizontal, et le point de vue de la projection verticale à l'infini *derrière* le plan vertical; mais comme on place les grandeurs qu'on représente, autant qu'il est possible, au-dessus du plan horizontal, et en avant du plan vertical (29), il est naturel de supposer les points de vue des deux projections, respectivement *au-dessus* et *en avant* des deux plans de projection.

plans de projection, et les unes par rapport aux autres, ce qui demande toujours beaucoup de sagacité et d'attention.

D'après cela, pour éviter des difficultés, et pour que le trop grand nombre de lignes pleines ne rende pas les épures confuses, il convient de borner l'emploi des lignes pleines et ponctuées à la représentation des grandeurs importantes.

53. Quant aux grandeurs qui servent aux constructions, il est bon de les représenter avec des *lignes pointillées*, comme EF, parce que ces lignes sont peu apparentes et qu'elles n'apportent conséquemment que peu de confusion sur les dessins, et parce qu'elles sont faciles à faire, ce qui est d'autant plus avantageux qu'elles sont souvent très nombreuses. Pl. 3. Fig. 5.

54. De ce que les grandeurs importantes ont des parties vues et cachées, il s'ensuit qu'on admet qu'elles existent; et comme les grandeurs qui servent aux constructions se représentent sans distinguer les parties vues des parties cachées, nous ferons la supposition très naturelle qu'elles n'existent pas physiquement dans l'espace, ou au moins qu'elles n'y ont que l'existence momentanée que le discours suppose.

55. Quelquefois la supposition qu'une grandeur importante existe, et la nécessité qui s'ensuivrait de déterminer ses parties vues et cachées, conduirait à des recherches pénibles, qui nous écarteraient trop de notre sujet : dans ce cas, nous considérerons cette grandeur comme si elle n'était nécessaire que pour les constructions; mais au lieu de la représenter avec des lignes pointillées, nous la représenterons avec des lignes composées de points et d'élémens linéaires, comme GH, G'H', G"H". Ces lignes recevront le nom de *lignes mixtes*.

Nous les emploierons aussi pour indiquer les grandeurs qui présenteront quelque singularité remarquable, ou qui seront d'une importance moyenne, et qu'il faudra distinguer des constructions ordinaires.

56. D'après cela, voici les conventions qui serviront pour la mise au trait des épures.

1re Convention. *Les données, les résultats et les grandeurs importantes sont supposés exister dans l'espace, et leurs parties vues et cachées seront en général indiquées, les premières en lignes pleines, et les dernières en lignes ponctuées.*

2e Convention. *Les autres grandeurs ne sont pas supposées exister dans l'espace, et on les indiquera ordinairement par des lignes pointillées.*

3° Convention. *Toutes les fois que, par une des raisons exposées n° 55, on s'écartera, pour une grandeur, des deux règles précédentes, on supposera que cette grandeur n'existe pas dans l'espace, et on la représentera au moyen de lignes mixtes* (*).

Nous aurons soin d'exposer par la suite, après chaque problème, sous le titre d'*Exécution de l'épure*, les particularités auxquelles pourra donner lieu le tracé des lignes et la détermination de leurs parties vues et cachées.

57. Pour qu'on se familiarise promptement avec les conventions précédentes, appliquons-les aux figures des planches 1 et 3. Quant à la planche 2, il serait superflu de nous y arrêter.

Pl. 1. Fig. 1, 2, 3, 5 et 6. Les plans de projection étant sur les figures 1, 2, 3, 5 et 6 de la planche 1 des grandeurs de première importance, on a marqué leurs contours en lignes pleines, parce que ces contours sont vus.

Fig. 4. Dans la figure 4, même planche, les lignes PQ, QR, RO, OP, VU, UT, TS, SV, qui forment les contours des deux plans de projection PQRO, VUTS, ont été marquées en lignes pleines ou ponctuées, selon qu'elles se sont trouvées vues ou cachées. Les lignes CD, *cd*, *c'd'*, *ef*, dont il est principalement question dans le texte, étant vues, on les a indiquées en lignes pleines, et l'on a tracé, au moyen d'élémens linéaires, toutes les autres lignes de la même figure, parce qu'elles ont peu d'importance.

Fig. 6. 58. Dans la figure 6, le plan (AB, BC) est percé par la droite (PQ,P'Q') en un point (P, P') que nous saurons bientôt déterminer (68 et 69) : la partie (PR, P'R') de cette droite, considérée en projection horizontale, est sous le plan (AB, BC), et elle est derrière ce plan, quand on la considère en projection verticale ; cette partie n'est donc vue ni en projection horizontale, ni en projection verticale, et c'est pourquoi les lignes PR, P'R', sont ponctuées.

Les traces AE, CD, du plan (AB, BC), présentent aussi des parties ponctuées BD, BE, par la raison que ces parties ne sont pas vues. En effet, il est évident que la ligne BE est sur la partie postérieure du plan horizontal, c'est-à-dire sous le rabattement de la partie supérieure du plan vertical (30), et que la ligne BD est sur la partie inférieure de ce dernier plan, c'est-à-dire sous la partie antérieure du plan horizontal; donc les lignes BD, BE, ne sont pas vues.

(*) Ces conventions supposent que l'on représente les surfaces avec des lignes; c'est ce qu'on fait effectivement, ainsi qu'on le verra livre II, chapitre I.

Suivant les conventions établies, la partie B*m* de la ligne de terre étant cachée par le plan (AB, BC), elle devrait être ponctuée; mais comme on suppose perpétuellement, en considérant les plans de projection, qu'ils sont rectangulaires entre eux (10), la ligne de terre doit toujours être pleine, parce qu'elle représente sur chaque plan de projection l'autre plan de projection. Pl. 1. Fig. 6.

La droite (AB, A'B') (pl. 3, fig. 2) n'étant vue que dans la partie comprise entre les deux points (A, A') et (B, B'), puisque les autres parties de cette droite sont situées au-dessous du plan horizontal, ou derrière le plan vertical, on a ponctué les parties de ses projections qui correspondent aux parties cachées, et l'on a mis en lignes pleines celles qui correspondent aux parties vues. Pl. 3. Fig. 2.

De même, la droite (AB, A'B'), qui passe en (A, A') derrière le plan vertical, a sa partie (A*m*, A'*m*') tracée en petits points. Dans la même figure, *bm* est un résultat dont la partie vue sur le plan horizontal est pleine, et dont la partie cachée par le rabattement du plan vertical est ponctuée. Fig. 3.

Enfin, dans la figure 4, planche 3, l'angle demandé AED étant formé par la ligne de terre et par une droite AE située sous le plan donné, on a ponctué cette ligne vers le point E; et si elle n'est pas ponctuée dans toute sa longueur, c'est qu'on l'a considérée comme une ligne de construction dans la partie qui aboutit en A. Fig. 4.

CHAPITRE III.

Problèmes relatifs aux points, aux droites et aux plans.

59. *Problème* 1er. *Mener par un point donné une parallèle à une droite donnée.*

Nous allons d'abord démontrer que si deux droites parallèles sont projetées sur un même plan, leurs projections sur ce plan seront parallèles.

Pour cela, concevons sur chacune de ces droites un point choisi arbitrairement, et imaginons qu'on abaisse par les points conçus des perpendiculaires aux plans de projection: les perpendiculaires à un même plan seront parallèles entre elles. Or, les plans projetans des droites en question passe-

ront chacun par une de ces droites et par la perpendiculaire correspondante ; donc l'un de ces plans sera parallèle à l'autre, comme contenant deux droites respectivement parallèles à deux autres droites contenues dans ce dernier ; donc ils couperont le plan de projection suivant des droites parallèles : mais ces droites seront les projections des droites données ; donc, etc.

Pl. 5. Fig. 1. Soit donc (AB, A'B') la droite donnée, et (C, C') le point donné. La projection horizontale de la droite demandée passera nécessairement par le point C, et sa projection verticale par le point C'; et puisque ces deux projections doivent être respectivement parallèles aux droites AB, A'B', il ne s'agira que de mener par le point C, CD parallèle à AB; par le point C', C'D' parallèle à A'B', et la droite (CD, C'D') que l'on obtiendra, sera la droite demandée.

Fig. 2. 60. *Problème* 2. *Mener par un point connu* (C, C'), *un plan parallèle au plan donné* (EF, FG).

Il est évident que le plan cherché aura ses traces parallèles à celles du plan donné. Or, il suit de là que si l'on mène par le point (C, C') des parallèles aux traces EF, FG, ces parallèles seront dans le plan demandé, et qu'elles perceront les plans de projection suivant des points des traces de ce plan. Menons donc par le point (C, C') une parallèle à la trace EF : cette trace est elle-même sa projection horizontale, et elle a pour projection verticale la ligne de terre (25); donc, si l'on mène par le point C la droite CH parallèle à EF, et par le point C', C'H' parallèle à FH, la droite (CH, C'H') sera parallèle à EF, et par conséquent contenue dans le plan demandé. Mais cette droite perce le plan vertical au point H'; donc si l'on mène par ce point la droite H'I parallèle à GF; puis par le point I, la droite IK parallèle à EF; le plan (KI, IH'), ainsi obtenu, sera le plan cherché.

Si l'on mène par le point (C, C') une droite parallèle à FG, cette droite étant dans le plan (KI, IH'), percera nécessairement le plan horizontal en un point de KI ; en sorte que la construction de ce point donnera le moyen de vérifier le résultat obtenu par les opérations précédentes.

61. *Exécution de l'épure.* Les parties FE, FG, des traces du plan donné, étant situées sur les portions antérieure et supérieure des plans de projection, elles sont vues et doivent par conséquent être indiquées en lignes pleines (56). Les prolongemens de ces traces, au-delà du point F, sont

ponctués, parce qu'ils sont situés sur les parties postérieure et inférieure des mêmes plans. Quant au plan demandé, il est entièrement caché, sur chacun des plans de projection, par la surface du plan donné : les traces MK, LH', doivent en conséquence être ponctuées. Pl. 1. Fig. 2.

62. *Problème* 3. *Mener un plan par trois points donnés* (A, A'), (B, B') *et* (C, C'). Fig. 3

Par les deux points (A, A'), (B, B'), menons une droite (AB, A'B'), elle sera dans le plan demandé : or, elle percera le plan vertical en (D, D') et le plan horizontal en (E, E'); donc le premier point (D, D') appartient à la trace verticale du plan cherché, et le second (E, E') à sa trace horizontale. Menons de même par les points (A, A') et (C, C') une nouvelle droite (AC, A'C'), elle sera aussi dans le plan cherché; donc le plan F' où elle percera le plan vertical, et le point G où elle percera le plan horizontal, appartiendront aux traces de ce plan. Donc enfin, si l'on mène les droites D'F', GE, qui passent par les points obtenus (D, D') et (F, F'), (G, G') et (E, E'), elles détermineront le plan demandé (GE, D'F').

Il est clair que si l'on mène par les points (B, B') et (C, C'), une troisième droite (BC, B'C'), elle sera, comme les deux premières, située dans le plan demandé, et percera par conséquent les plans de projection suivant des points I et J des traces obtenues GE, D'F'. On pourra déterminer ces points, et ce sera un moyen de vérifier l'exactitude des constructions faites; mais comme les traces GE, D'F', doivent déjà se rencontrer en un même point H de la ligne de terre, cette dernière propriété sera dans la pratique une suffisante vérification.

63. *Problème* 4. *Mener par un point quelconque une droite perpendiculaire à un plan donné, et déterminer le point d'intersection de la droite et du plan.*

Pour distinguer facilement, dans le discours, le plan donné, des deux plans de projection, nous remarquerons que ce plan est en général incliné par rapport à ces derniers, et nous le nommerons *le plan incliné*.

64. Cela posé, concevons que la droite demandée soit menée dans l'espace : le plan projetant de cette droite correspondant au plan horizontal, sera évidemment perpendiculaire au plan incliné; donc il sera perpendiculaire au plan horizontal et au plan incliné; donc il sera perpendiculaire à leur intersection : donc cette intersection, ou, ce qui revient au même, la trace horizontale du plan incliné, sera perpendiculaire au plan projetant.

Mais une droite perpendiculaire à un plan est perpendiculaire à toutes les droites qui se croisent par son pied dans ce plan; or, la trace horizontale du plan projetant est une droite située dans ce plan, et passant par le pied de la trace horizontale du plan incliné; donc ces deux traces sont perpendiculaires entre elles. Et comme la trace du plan projetant est la projection horizontale de la droite demandée, il s'ensuit que cette projection est perpendiculaire à la trace horizontale du plan incliné.

On démontrerait de même que la projection verticale de la droite demandée est perpendiculaire à la trace verticale du même plan; ainsi, nous pouvons tirer de ces raisonnemens la conclusion suivante : *Lorsqu'une droite est perpendiculaire à un plan, les deux projections de la droite sont respectivement perpendiculaires aux traces du plan.*

65. Réciproquement, *Lorsqu'une droite a ses deux projections respectivement perpendiculaires aux deux traces d'un plan, elle est perpendiculaire à ce plan.*

En effet, chaque plan projetant de la droite en question étant perpendiculaire à l'une des traces du plan incliné, il est perpendiculaire à ce plan lui-même. Or cette droite est l'intersection de ses deux plans projetans; donc elle est l'intersection de deux plans perpendiculaires au plan incliné : donc elle est perpendiculaire à ce plan.

66. On peut énoncer ainsi ces deux propositions réciproques : *Lorsqu'il y a perpendicularité entre une droite et un plan, les projections horizontales et verticales de la droite, et les traces horizontales et verticales du plan, sont respectivement rectangulaires entre elles.*

Pl. 5 67. D'après cela, soit (BC, CD) le plan auquel on demande d'abaisser une
Fig. 1. perpendiculaire par un point quelconque (A, A'): il ne s'agira que de mener par les points A et A', les droites AH, A'H', respectivement perpendiculaires aux traces BC, CD, et la droite (AH, A'H') sera la perpendiculaire demandée.

68. Construisons maintenant le point d'intersection de cette perpendiculaire et du plan (BC, CD) : on sait, par ce qu'on a vu n° 58, que la mise au trait des lignes de l'épure ne présentera aucune difficulté, lorsqu'il sera connu. Pour le trouver, nous mènerons par AH le plan projetant (EA, EE'), dont la trace verticale EE' est perpendiculaire à la ligne de terre. Ce plan contiendra la droite (AH, A'H'); donc il contiendra le point cherché : mais ce point est aussi sur le plan donné; donc il est sur l'intersection commune de ces deux plans. Or, les traces de ces plans se coupent suivant les deux

points F et E'; donc ils ont pour intersection la droite (FE, F'E'). Et Pl. 5.
comme le point cherché est sur cette droite et sur (AH, A'H'), il est néces- Fig. 1.
sairement projeté sur le plan vertical à l'intersection H' de leurs projections. Menons donc H'H perpendiculaire à GC, et nous obtiendrons le point demandé (H, H').

En faisant, sur la projection A'H', des constructions analogues à celles que nous venons de faire sur AH, on vérifiera l'exactitude de la solution obtenue.

69. Il est évident que si la droite (AH, A'H'), n'était pas perpendiculaire au plan donné, l'intersection commune (H, H') ne s'en obtiendrait pas moins par les constructions que nous venons d'indiquer.

70. *Problème* 5. *Par un point donné* (A, A'), *abaisser une perpendi-* Fig. 2.
culaire sur une droite donnée (BC, B'C').

Concevons par le point donné un plan perpendiculaire à la droite donnée, elle le percera en un point, et si l'on fait passer une ligne droite par ce point et par le point donné, cette droite sera la perpendiculaire demandée.

Pour mener par le point (A, A') un plan perpendiculaire à (BC, B'C'), nous remarquerons que la trace verticale de ce plan, quelle qu'elle soit, est une droite perpendiculaire à B'C' (66), et ayant pour projection horizontale la ligne de terre; donc, si par le point (A, A'), nous menons une droite (AD, A'D'), dont la projection horizontale soit parallèle à la ligne de terre, et la projection verticale perpendiculaire à B'C', cette droite sera dans le plan cherché, comme étant parallèle à une droite contenue dans ce plan : donc elle percera le plan horizontal en un point D appartenant à la trace de ce plan. Menons donc par le point D la droite DE perpendiculaire à BC, puis par le point E, la droite EF perpendiculaire à B'C'; le plan (DE, EF) sera le plan de construction cherché.

Or, en appliquant à la figure les procédés exposés plus haut (68), on trouvera que la droite donnée (BC, B'C') perce le plan (DE, EF) suivant le point (G, G'); donc en menant par les points (A, A') et (G, G') la droite (AG, A'G'), cette droite sera la perpendiculaire demandée.

71. *Exécution de l'épure.* Les parties BC, B'C', AH, A'H', des projections de la droite donnée et de la droite demandée, correspondent à des portions de ces droites, qui, à partir des traces (C, C'), (H, H'), sont au-dessus du plan horizontal et en avant du plan vertical; donc les projections

Pl 5. Fig 2. BC, B'C', AH, A'H', doivent être indiquées en lignes pleines jusqu'aux points C, C', H, H' (56). Au-delà des traces (C, C'), (H, H'), les droites (BC, B'C'), (AH, A'H'), sont évidemment cachées, et leurs projections doivent en conséquence être ponctuées. Les autres lignes de l'épure sont des lignes de construction, aussi les a-t-on tracées au moyen d'élémens linéaires détachés les uns des autres.

Comme le plan (DE, EF) est d'une assez grande importance, on aurait pu l'indiquer au moyen de lignes mixtes (55).

Fig. 3. 72. *Problème* 6. *Étant données deux droites* (AB, A'B'), (BC, B'C'), *qui se rencontrent en un point* (B, B'), *trouver l'angle qu'elles font entre elles.*

Nous concevrons un plan par les deux droites données; nous déterminerons les points A et C où elles percent le plan horizontal; nous mènerons par ces points une ligne droite AC, et cette ligne sera la trace du plan des deux droites. Nous imaginerons ensuite que ce plan s'abatte sur le plan horizontal, en tournant sur la trace AC; nous construirons les rabattemens des droites données, et l'angle de ces rabattemens sera l'angle cherché.

Or, dans le mouvement, les points du système décriront des arcs de cercles dont les plans seront perpendiculaires à la droite AC, et dont les centres seront les divers points de cette droite. Comme elle est horizontale, ces plans seront verticaux. Donc si l'on mène par le point B du plan horizontal, la droite GD perpendiculaire à la charnière AC, D sera le centre de l'arc décrit par le point (B, B'), et cet arc sera compris entièrement dans le plan vertical GD; donc le rabattement du point (B, B') sera quelque part sur GD. Mais le rayon de cet arc est l'hypoténuse du triangle rectangle dont les côtés adjacens à l'angle droit sont l'horizontale BD, et la verticale *b*B' qui se projette horizontalement en B; donc si l'on porte BD de *b* en *d*, et qu'on mène l'hypoténuse *d*B', cette hypoténuse sera le rayon en question : donc en portant *d*B' de D en G, on aura le rabattement G du point (B, B').

Remarquons maintenant que les points A et C des droites données sont eux-mêmes leurs rabattemens; car ils sont dans la charnière AC, et n'ont pu par conséquent prendre aucun mouvement. Donc les deux points A et G sont les rabattemens de deux points de (AB, A'B'). Pareillement G et C sont les rabattemens de deux points de (BC, B'C'); donc AG et GC sont les rabattemens des droites données : donc enfin AGC est l'angle demandé.

73. Lorsque deux droites données ne se rencontrent pas, il n'y a pas

d'espace angulaire compris entre elles ; mais comme on apprécie la différence de leurs directions, par l'angle sous lequel se coupent deux parallèles à ces droites menées par un même point, on est convenu de considérer cet angle comme celui que forment les droites données. Pl. 5. Fig. 3.

D'après cela, et d'après la solution précédente, il sera facile de trouver l'angle de deux droites quelconques, soit qu'elles se rencontrent ou bien qu'elles ne se rencontrent pas.

74. *Exécution de l'épure.* Les parties vues et cachées des droites données sont faciles à déterminer, et sont indiquées, les premières en lignes pleines, et les dernières en lignes ponctuées. Quant aux côtés de l'angle cherché, ils sont en lignes pleines vers le point G, où ils sont considérés comme résultats du problème proposé, et ils sont indiqués vers les points A et C par des élémens rectilignes détachés ; parce qu'on les considère vers ces points comme des lignes de construction (56).

75. Problème 7. *Un plan* (AB, BC) *et une droite* (DE, D'E') *étant donnés, on demande l'angle qu'ils font entre eux.* Fig. 4.

L'angle d'une droite et d'un plan n'étant autre chose que celui de cette droite avec sa projection sur ce plan, il est évident qu'il a pour complément l'angle de cette droite avec une perpendiculaire abaissée sur le plan par un des points de la droite.

Prenons donc un point (D, D') sur la droite donnée, et par ce point, menons une droite (DF, D'F') perpendiculaire au plan (AB, BC) : cette droite fera avec la droite donnée un angle EGF facile à déterminer (72); et si l'on abaisse par un point F, pris sur l'un des côtés de cet angle, une droite FH perpendiculaire à l'autre côté, cette perpendiculaire fera avec le côté FG un angle GFH, complément de FGH, égal à l'angle cherché.

76. *Exécution de l'épure.* Le sommet de l'angle obtenu GFH étant sous le plan donné (AB, BC), les parties des lignes de construction HF, GF, qui sont situées vers le point F, et qui comprennent le résultat du problème, ne sont pas vues, et doivent par conséquent être ponctuées (56). Quant aux projections de la droite donnée, elles ne sont pleines que jusqu'au point (I, I'), où cette droite passe tout-à-la-fois sous et derrière le plan donné.

77. Problème 8. *Deux plans* (AB, BC'), (AD, DC'), *étant donnés, trouver l'angle qu'ils font entre eux.* Pl. 6. Fig. 1.

Pour résoudre ce problème, nous chercherons d'abord l'intersection commune de ces plans ; nous mènerons ensuite, par un point de cette inter-

section, un plan qui la coupe perpendiculairement, ce plan déterminera sur les plans donnés deux droites d'intersection, et l'angle de ces droites sera l'angle cherché.

Pl. 6. Fig. 1. Les traces horizontales AB, AD, des plans donnés, se coupent en A; leurs traces verticales se coupent en C'; les points A et C' se projettent sur la ligne de terre en A' et C : donc la droite (AC, A'C') est l'intersection des deux plans donnés.

Menons, par un point quelconque (E, E') de cette intersection, un plan qui lui soit perpendiculaire. Il aura pour trace verticale une droite inconnue perpendiculaire à A'C' (66); laquelle droite se projettera horizontalement suivant la ligne de terre. Donc, si l'on mène par le point (E, E') la ligne (EF, E'F'), dont la projection horizontale est parallèle à BA', et la projection verticale perpendiculaire à A'C', cette ligne sera parallèle à la trace verticale inconnue, et sera par conséquent dans le plan cherché : or, elle percera le plan horizontal en F; donc le point F appartient à la trace horizontale de ce plan. Mais cette trace est perpendiculaire à AC (66); donc, si l'on mène par le point F une droite FG à angle droit sur AC, cette droite sera la trace horizontale du plan mené par (E, E') perpendiculairement à (AC, A'C'). Quant à sa trace verticale, il serait superflu de la construire.

Ce plan coupera les traces AB, AD, suivant les points K et H, et les plans donnés suivant deux droites, que les points (E, E') et K, (E, E') et H, détermineront complètement. Or, il ne s'agira que d'avoir les angles de ces droites. Pour cela, on rabattra sur le plan horizontal (72) le plan dont la trace est FG; les points K et H resteront immobiles; le point (E, E') décrira autour du point G un arc dont le rayon IE' sera facile à construire, et ce point viendra s'abattre en L. Les droites en question se rabattront par conséquent en KL et HL, et KLH sera l'angle demandé.

78. *Exécution de l'épure*. Il est aisé de voir que le plan (AB, BC') cache les parties DA, DC', des traces du plan (DA, DC'); que la portion (AC, A'C') de l'intersection des plans donnés, comprise entre les points (A, A'),(C, C'), où (AC, A'C') perce les plans de projection, est vue; qu'à partir de l'intersection (AC, A'C'), et du côté opposé au point B, le plan (AD, DC') se trouve au-dessus et en avant du plan (AB, BC'), en sorte que les portions AP, C'M, des traces du dernier ne sont pas vues, et qu'au contraire les parties AN, C'O, de celles du premier sont vues. Enfin, il est aisé de voir que les lignes KL, LH, qui comprennent l'angle demandé, sont cachées par les plans

donnés; ainsi l'application des conventions du n° 56 ne doit présenter ici aucune difficulté. Pl. 6. Fig. 1.

La ligne KG étant de toutes les lignes de construction la ligne la plus importante, il serait assez convenable de l'indiquer en lignes mixtes (55).

79. *Problème* 9. *Deux droites étant données, on demande la plus courte ligne qui puisse les joindre.*

Si ces lignes se rencontraient, la ligne demandée n'existerait pas; si elles étaient parallèles, cette ligne serait une droite quelconque située dans leur plan, et perpendiculaire à chacune d'elles : d'où l'on voit que la question ne doit être traitée que dans le cas où les droites données ne sont pas comprises dans un même plan.

De quelque manière qu'elles soient alors situées dans l'espace, on peut toujours mener par l'une un plan parallèle à l'autre; car si l'on mène par un point de la première une droite parallèle à la seconde, le plan que la première droite et cette parallèle détermineront sera le plan en question.

Or, si l'on conçoit que la seconde droite soit projetée sur ce plan, sa projection et la première droite se rencontreront en un point, et si l'on élève par ce point une perpendiculaire au plan auxiliaire, elle coupera à angle droit la seconde droite, elle coupera aussi à angle droit la première, elle sera par conséquent à la fois perpendiculaire à ces deux droites, et il s'ensuit qu'elle mesurera entre elles leur plus courte distance. En effet, elle sera la plus courte ligne qu'on puisse mener d'un point quelconque de la seconde droite à un point quelconque du plan auxiliaire, et conséquemment à un point quelconque de la première droite.

80. Soient donc (AB, A'B'), (CD, C'D'), deux droites qui ne se rencontrent pas et qui ne sont pas parallèles; il ne s'agira, pour avoir la plus courte ligne qui puisse les joindre, ou, ce qui revient au même, leur plus courte distance, que d'exécuter les constructions précédentes. Fig. 2.

On prendra donc sur la première (AB, A'B') un point quelconque, par exemple, le point (A, A') où elle perce le plan vertical; par ce point on mènera la droite (AE, A'E') parallèle à la seconde droite (CD, C'D') : cette parallèle et la droite (AB, A'B') perceront les plans de projection en des points (B, B'), (E, E') et (A, A'), qui détermineront les traces du plan auxiliaire (BF, FA'). On abaissera par un point quelconque (C, C') de la seconde droite (CD, C'D'), une perpendiculaire (CG, C'G') sur le plan auxi-

Pl. 6. Fig. 2. liaire (BF, FA'); elle le percera en un point (G, G'), et en menant par ce point une parallèle à la droite (CD, C'D'), on aura la projection (GH, G'H') de cette droite sur le plan auxiliaire. Cette projection coupera la première droite (AB, A'B') en un point (H, H'); on élevera, par ce point, une perpendiculaire au plan (BF, FA'), ou, ce qui est la même chose, une parallèle (HD, H'D') à la droite (CG, C'G'), et cette parallèle, perpendiculaire à la fois sur les deux droites données, sera la ligne sur laquelle se mesure leur plus courte distance. Il est clair que cette perpendiculaire coupe la droite (CD, C'D') en (D, D') : elle a son pied sur (AB, A'B') en (H, H'); ainsi, la portion de droite (HD, H'D') est la ligne demandée.

CHAPITRE IV.

Des lignes courbes.

81. Quoique nous ayons fait connaître, dès le chapitre 1er, la manière de représenter les lignes courbes, nous ne nous sommes pas occupés, chapitre II et chapitre III, des problèmes à résoudre sur ces lignes, parce qu'il était bon d'exposer auparavant leurs propriétés générales. C'est ce que nous allons faire dans ce chapitre. Nous reviendrons d'abord à la représentation des courbes, puis nous les considérerons sous le rapport de leurs directions en chacun de leurs points, sous celui de leurs courbures variables d'un point à un autre, et sous celui d'une génération (analogue à celle du cercle) dont elles sont susceptibles. Cette marche nous conduira successivement aux *tangentes*, aux plans et aux cercles qu'on nomme *plans osculateurs* et *cercles osculateurs*, et aux lignes connues sous les noms de *développantes* et de *développées*. Nous exposerons ensuite la théorie d'une courbe fort usuelle, que l'on appelle *hélice*, et nous terminerons par la résolution des problèmes que l'on peut proposer sur les lignes courbes, considérées en elles-mêmes et par rapport aux grandeurs que nous savons représenter. Dans le complément (liv. VI, chap. III), nous nous occuperons des propriétés qui ne sont pas assez élémentaires pour être actuellement exposées.

82. Nous avons vu précédemment (16), que les projections d'une ligne courbe définissaient la forme de cette ligne et sa position. D'après cela, si

l'on trace arbitrairement sur le plan horizontal une ligne ABC, et sur le plan vertical une ligne A'B'C', il correspondra à la première de ces lignes une surface projetante verticale (6); à la seconde une surface projetante horizontale, et l'intersection de ces surfaces sera une ligne parfaitement déterminée de forme et de position. Pl. 7 Fig. 2.

Si les deux projections ABC, A'B'C', sont deux lignes droites, les surfaces projetantes correspondantes à ces lignes seront des plans; la ligne (ABC, A'B'C') sera l'intersection de ces plans, et cette ligne sera par conséquent une droite.

83. Si l'une des deux projections ABC, A'B'C', est une ligne droite, la première par exemple, et que l'autre soit une ligne courbe, la surface projetante verticale correspondante à la ligne ABC sera plane, et la ligne (ABC, A'B'C') se trouvera entièrement comprise dans un plan. Ce sera ce qu'on appelle par cette raison une *courbe plane*.

Enfin, si les projections ABC, A'B'C', ne sont droites ni l'une ni l'autre, et cela quelque système de plans de projection que l'on choisisse (*), les points de la ligne (ABC, A'B'C'), ne pourront être à la fois contenus dans aucun plan : cette courbe participera par conséquent, de quelque manière que deux projections la représentent, de la courbure de deux surfaces projetantes; et ce sera ce qu'on appelle une *courbe à double courbure* (773).

84. Le cercle étant engendré par l'extrémité d'un fil d'une longueur constante et en mouvement sur un plan autour d'un point immuable, le fil générateur a constamment toutes ses parties situées dans ce plan; ainsi le cercle est une courbe plane.

Si l'on veut avoir un exemple d'une courbe à double courbure, on n'aura qu'à tracer sur le plan horizontal un arc de cercle ABC, et sur le plan vertical un autre arc de cercle A'B'C'; ces deux arcs détermineront une courbe (ABC, A'B'C'), qui sera, en général, une courbe à double courbure (**).

(*) On conçoit que la courbe (ABC, A'B'C') pourrait être plane, quoique les projections ABC, A'B'C', fussent des courbes; et dans ce cas, il est clair que si on la rapportait à de nouveaux plans rectangulaires, donnés par rapport aux premiers, il serait possible qu'en construisant ses projections sur ces nouveaux plans, l'une d'elles se trouvât une ligne droite.

(**) Si les arcs ABC, A'B'C', avaient même rayon, et que leurs centres fussent sur une même droite perpendiculaire à la ligne de terre, la courbe (ABC, A'B'C'), qui leur correspondrait, serait une courbe plane du genre de celles que l'on appelle *ellipses* (voyez la Note 2).

85. Lorsqu'on veut opérer sur une courbe plane, on peut, pour l'ordinaire, se passer de plans de projection, parce qu'on la construit dans son plan, et qu'on opère sur ce plan; mais, pour opérer sur une courbe à double courbure, ou même sur une courbe plane considérée avec d'autres grandeurs qui ne soient pas dans son plan, il faut absolument le secours des plans de projection. D'après cela, dans la plupart des questions que nous aurons à résoudre, nous nous donnerons une ligne courbe, plane ou à double courbure, par ses deux projections; seulement nous aurons le soin, lorsqu'il s'agira d'une courbe plane, de simplifier les données autant qu'il se pourra, en prenant une ligne droite pour l'une de ses projections.

Pl. 7. Fig. 1

86. Le premier usage que nous ferons des lignes ABCD, A'B'C'D', qui déterminent une courbe (ABCD, A'B'C'D'), ce sera de construire les points communs à la courbe et aux plans de projection : c'est-à-dire les traces de cette courbe.

Or, on sait que les traces horizontales se projettent verticalement sur la ligne de terre (24); donc si des points A' et D', où la projection verticale A'B'C'D' rencontre la droite MN, on élève des perpendiculaires A'A, D'D, à cette droite, ces perpendiculaires couperont la projection horizontale ABCD suivant les points A et D, ou (A, A') et (D, D'), qui seront les traces horizontales cherchées.

Pour avoir les traces verticales de la même courbe, on se rappellera qu'elles doivent avoir leurs projections horizontales sur MN; on en conclura que ces traces se projettent horizontalement en B et C; on élevera perpendiculairement à la ligne de terre les droites BB', CC'; elles couperont la ligne A'B'C'D' en des points B' et C', ou (B, B') et (C, C'), et ces points seront les traces verticales cherchées.

87. Ces traces, que l'on construit ainsi dans tous les cas possibles, servent à déterminer les parties de la courbe (ABCD, A'B'C'D'), cachées par les plans de projection. En effet, cette courbe traversant le plan horizontal en (A, A') et (D, D'), elle a ses arcs (Ax, $A'x'$), (Dy, $D'y'$), cachés à partir de ces points sur les deux projections, savoir : sur la projection horizontale, parce qu'ils sont au-dessous du plan horizontal, et sur la projection verticale, parce qu'ils se projettent verticalement sur la partie inférieure du plan vertical, laquelle est cachée sur le dessin par la partie antérieure du plan horizontal (30). Et la même courbe, perçant le plan vertical en (B, B') et (C, C'), elle a son arc (BmC, $B'm'C'$) derrière le plan vertical; il n'est par conséquent pas vu sur la projection verticale, et il

n'est pas vu non plus sur la projection horizontale; car il se projette horizontalement sur la partie postérieure du plan horizontal, laquelle est cachée sur le dessin par la partie supérieure du plan vertical. Pl. 7. Fig. 1.

Il est clair que les traces en question aident beaucoup à se bien figurer dans l'espace, la position de la courbe (ABCD, A'B'C'D'), par rapport aux plans de projection. Par cette raison, et parce qu'elles séparent les arcs que cachent ces plans, de ceux qu'ils laissent voir, nous aurons soin en général de les marquer sur les épures par des lignes de construction AA', BB', CC', DD'.

88. Connaissant les traces d'une courbe, il y a une question qui se présente à l'esprit sur-le-champ, lorsqu'on les examine en cherchant à se rendre compte de la forme et de la position de cette courbe; c'est de déterminer les angles, plus ou moins grands, sous lesquels elle perce en ces points les deux plans de projection. Cette question conduit directement à la théorie des tangentes.

89. DES TANGENTES. Imaginons une ligne courbe quelconque dans l'espace, et concevons qu'on prenne sur son cours un élément infiniment petit. Il est clair que la petitesse de cet élément empêchera qu'il ne participe de la courbure de cette ligne; donc on peut supposer que la ligne courbe en question soit composée de petites lignes droites, pourvu que ces droites soient infiniment petites, et que leur nombre soit en conséquence infini. Mais chacun de ces élémens rectilignes infiniment petits appartient à une ligne droite indéfinie qui, en-deçà et au-delà de l'élément, s'écarte du cours de la courbe, et qui ne se confond entièrement avec elle que suivant ce même élément. Or, cette ligne droite est ce qu'on appelle une *tangente*, et l'élément commun à la droite et à la courbe, est ce qu'on appelle leur *point de contact* ou leur *élément de contact*.

90. L'élément infiniment petit d'une ligne courbe quelconque a pour projections deux élémens rectilignes, aussi infiniment petits, qui font partie des projections de cette courbe; donc si l'on prolonge indéfiniment ces deux élémens, on obtiendra deux droites tangentes aux projections de la courbe, et qui ne seront autre chose que les deux projections de la droite tangente dans l'espace à la courbe en question. C'est-à-dire, par exemple, que la tangente en (B, B') à la courbe (ABC, A'B'C'), a pour projections Fig. 2.
les droites MB, M'B', respectivement tangentes aux projections ABC, A'B'C', en B et en B'.

91. Si l'on veut appliquer cette théorie au cercle engendré par l'extrémité d'un fil, on remarquera que le point générateur décrit la même ligne, soit qu'il se meuve dans un sens ou dans le sens opposé; on en conclura qu'à chaque instant du mouvement, le fil ne penche pas plus sur une extrémité de l'élément engendré que sur l'autre extrémité, et que chaque élément est par conséquent à angle droit sur le rayon correspondant : d'où l'on voit que la tangente en un point d'un cercle est perpendiculaire au rayon qui passe par ce point.

92. Quant au problème dont nous sommes partis (88), et qui consiste à
Pl. 7. trouver l'angle sous lequel une courbe quelconque (ABCD, A'B'C'D'), perce
Fig. 1. un plan de projection, par exemple, le plan horizontal, il est clair que cet angle est celui que fait avec ce même plan l'élément infiniment petit qui correspond, sur la courbe, à la trace (A, A') ou (D, D'). Ainsi, pour résoudre ce problème, il ne s'agira que de mener par les points (A, A') et (D, D'), des tangentes à la courbe (ABCD, A'B'C'D'), et de construire, par le procédé du n° 42, les angles de ces tangentes avec le plan horizontal.

93. L'usage des tangentes étant très fréquent dans toutes les applications des Mathématiques, on a donné des noms particuliers aux grandeurs qui ont des rapports simples avec ces lignes.

Ainsi, le plan mené par le point de contact d'une tangente, perpendiculairement à cette tangente, est ce qu'on appelle un *plan normal*. Les plans normaux d'une même courbe se distinguent d'ailleurs entre eux par les tangentes auxquelles ils correspondent, ou par les points de contact de ces tangentes.

Lorsqu'une courbe est plane, et qu'on mène par le point de contact d'une de ses tangentes, une droite perpendiculaire à cette tangente et comprise dans le plan de la courbe, cette droite est ce qu'on appelle une *normale* de la courbe. D'après cela, le rayon d'un cercle est la normale de la circonférence, au point où il aboutit sur cette circonférence.

Il suit de ces définitions, que les normales et les plans normaux se déduisent des tangentes par des opérations graphiques que déjà nous savons faire.

94. Pour compléter la théorie des tangentes, des normales et des plans normaux, il s'agirait maintenant de résoudre cette question : *Par un point donné sur une courbe connue, mener une tangente à cette courbe.* On en trouvera la solution générale plus loin (766); mais comme cette solution est très compliquée, et par là très peu susceptible d'être utile dans la pra-

tique, nous ne pourrons choisir, par la suite, les exemples de lignes courbes dont nous aurons besoin, que dans les familles pour lesquelles les tangentes s'obtiennent par des procédés synthétiques particuliers. Nous nous bornerons aux familles que ce chapitre et la Note 1re font connaître.

95. DES PLANS ET DES CERCLES OSCULATEURS. La tangente à une courbe ayant en commun avec elle (89) un élément infiniment petit, elle est de toutes les lignes droites possibles celle qui, au point de contact, approche le plus de se confondre avec la courbe; car pour qu'une autre droite touchât cette courbe plus intimement, il faudrait qu'elle eût deux élémens consécutifs communs avec elle, ce qui est impossible, puisque deux élémens consécutifs d'une courbe ne sont pas dans la même direction.

Mais ces deux élémens étant toujours dans un même plan, on va voir sortir de cette propriété des considérations nouvelles d'une grande utilité.

Soient AB, BC, deux élémens consécutifs infiniment petits d'une courbe Pl. 7.
quelconque; ils détermineront un plan qui passera par les deux tangentes Fig. 3.
consécutives MP, NQ, de cette courbe, et il la touchera aussi intimement qu'un plan puisse la toucher, attendu que pour qu'un plan se confondît avec elle suivant un arc d'une plus grande longueur, il faudrait qu'il passât par un troisième élément situé à la suite de AB et BC, ce qui, en général, est impossible, puisqu'un plan ne peut être assujetti à passer par plus de deux droites.

Or, le plan que déterminent les deux tangentes consécutives MP, NQ, menées à la courbe par deux élémens consécutifs AB, BC, est ce qu'on nomme le *plan osculateur* en B.

96. Si par BC, et par l'élément consécutif CD, on mène un nouveau plan, ce sera le plan osculateur en C, et ainsi de suite; en sorte qu'à chaque point B, C, etc., de la courbe, il correspond au plan osculateur particulier.

Il est clair que si tous les plans osculateurs se confondent en un seul, la courbe sera une courbe plane. Si, au contraire, ils diffèrent généralement les uns des autres, ce sera une courbe à double courbure.

97. Dans le plan osculateur ABC de deux élémens consécutifs AB, BC, d'une courbe quelconque, élevons, sur les milieux m et n de ces élémens, deux perpendiculaires mO, nO, ou, ce qui est la même chose (93), deux normales à cette courbe. Ces normales se couperont en un point O; et si, de ce point comme centre, avec la distance OB comme rayon, on décrit un cercle, il passera par les trois points A, B, C, et coïncidera avec la courbe

Pl. 7. Fig. 3. donnée suivant les deux élémens AB, BC : d'où il suit qu'il sera de tous les cercles possibles celui qui la touchera en B le plus intimement; car, pour qu'un autre cercle s'en rapprochât davantage, il faudrait qu'il eût plus de deux élémens, c'est-à-dire plus de trois points A, B, C, sur cette courbe, ce qui est impossible, puisque ces trois points suffisent pour le déterminer.

On appelle par cette raison le cercle qui a son centre en O, et dont le caractère est d'avoir deux élémens consécutifs AB, BC, communs avec la courbe, ou d'avoir deux tangentes consécutives MP, NQ, qui soient aussi tangentes à cette courbe, le *cercle osculateur* de cette même courbe en B.

98. La courbure en un point B d'une ligne ABCD..., provenant uniquement de ce que les tangentes MP, NQ, ou les élémens AB, BC, qui aboutissent en B, comprennent un angle PBQ, il s'ensuit que plus cet angle est grand, plus la courbure est grande, et réciproquement. On voit, d'après cela, qu'il est naturel de prendre l'angle PBQ pour mesure de la courbure. Nous le nommerons, par cette raison, l'*angle de courbure* (774).

Mais PBQ $=$ mOn; donc la courbure est aussi mesurée par l'angle mOn de deux normales consécutives.

Cela posé, on remarquera que mBn étant un petit arc du cercle qui a son centre en O, arc dont la longueur égale $\frac{1}{2}$ AB $+$ $\frac{1}{2}$ BC, on a, en désignant par R le rayon OB, et par π le rapport du diamètre à la circonférence,

$$\text{arc } mBn : 2\pi R :: \text{angle } mOn : 360^\circ;$$

ce qui donne

$$\text{l'angle } mOn = \frac{\text{arc } mBn \times 360^\circ}{2\pi R};$$

ou

$$\text{angle } mOn = \frac{(\frac{1}{2}\,AB + \frac{1}{2}\,BC)\,360^\circ}{2\pi R}.$$

Il suit de là que si l'on fait varier l'angle PBQ, sans changer la longueur de BC, les positions n' et O', que prendront les points n et O, seront telles qu'on ait, en appelant R' le nouveau rayon,

$$\text{angle } mO'n' = \frac{(\frac{1}{2}\,AB + \frac{1}{2}\,BC)\,360^\circ}{2\pi R'};$$

ce qui fournit la proportion

$$\text{angle } mOn : \text{angle } mO'n' :: \frac{1}{R} : \frac{1}{R'}.$$

Et comme mOn et $mO'n'$ représentent les courbures en B, pour les deux angles Pl. 7. Fig. 3.
de tangentes PBC, PBC', il viendra, en désignant par C et C' les courbures correspondantes à ces angles,

$$C : C' :: R' : R.$$

C'est-à-dire que *les courbures sont entre elles, sur toutes les courbes possibles, en raison inverse des rayons des cercles osculateurs.*

99. C'est donc au moyen de ces rayons qu'on devra mesurer les courbures, et c'est ce qui fait qu'on donne aux cercles osculateurs le nom de *cercles de courbure;* et que, par suite, on nomme leurs rayons et leurs centres, *rayons de courbure* et *centres de courbure* (*).

On remarquera que lorsqu'une courbe est plane, elle a tous ses plans osculateurs confondus en un seul, qui contient les centres de tous les cercles osculateurs, ou, ce qui revient au même, tous les centres de courbure. Pour une courbe à double courbure, au contraire, les plans osculateurs étant tous différens (96), les centres de courbure se trouvent distribués dans une suite de plans (772).

100. DES DÉVELOPPÉES ET DES DÉVELOPPANTES (**). On sait que si une droite, considérée dans un plan, tourne autour d'un de ses points supposé fixe, tous les autres points de la droite décriront autour du point fixe des circonférences de cercles concentriques. On va voir par ce qui suit qu'il n'y a aucune courbe qu'on ne puisse concevoir engendrée d'une manière analogue.

Soit ABCN une courbe quelconque tracée sur un plan; si l'on conçoit Fig. 4.
qu'une droite SR se meuve autour de cette courbe, sans glisser sur elle et sans cesser de lui être tangente, chaque point D de la droite SR décrira une courbe EDCOV, qui sera ce qu'on appelle une *développante* de ABCN; et cette dernière courbe prendra, par rapport à la ligne décrite EDCOV, le nom de *développée.*

101. Chaque élément mm' de la développante EDCOV, sera perpendiculaire à la direction correspondante SR de la droite mobile; car cet élément aura la même direction qu'aurait en D l'élément d'un arc de cercle décrit du point de contact B, comme centre, avec un rayon BD. Ainsi, la tan-

(*) C'est d'après les idées d'un de mes amis (M. de Maizière, ancien professeur) que j'ai amélioré dans cette édition la théorie des courbures des lignes.

(**) Cet article est tiré en grande partie de la Géométrie descriptive de M. Monge.

Pl. 7. Fig. 4. gente DT de la développante, est perpendiculaire à la tangente correspondante DB de la développée, ou, ce qui revient au même, *les normales à la développante sont tangentes à la développée.*

102. Si le point décrivant D est pris sur la droite RS, du côté BD qui s'approche de la développée, la courbe décrite DLKC s'approchera de ABCN; et lorsque le point D sera devenu lui-même le point de contact C de la droite mobile et de la développée, cette dernière courbe et la développante se rencontreront en C. Mais la développante ne franchira pas la développée, car dès que le point de contact de la droite mobile aura dépassé le point C, le point décrivant reviendra sur lui-même, en parcourant une ligne qui aura la figure COV. Et comme la courbe décrite est toujours perpendiculaire à la direction de la droite mobile, les deux branches CDE, COV, de la développante, seront perpendiculaires à la droite PM, qui touche ABCN en C, et par conséquent tangentes entre elles et normales à la développée.

Le point C, suivant lequel deux branches d'une même courbe se réunissent ainsi, est ce qu'on nomme un *point de rebroussement.*

103. Puisque tous les points de la droite mobile RS s'appuient successivement sur ABCN, sans que cette droite éprouve de mouvement dans le sens de sa longueur, il s'ensuit nécessairement, que la partie BD de la droite RS, comprise entre la développante et la développée, est égale en longueur à l'arc BHGC. De même, les tangentes HL, GK, NO, YZ, etc., sont égales aux arcs HGC, GC, CN, CNY, etc., qui leur correspondent.

Il suit de là que si un fil flexible et inextensible est enroulé sur la développée ABHGC, et qu'on vienne à le développer, à partir de l'extrémité C, ce fil prendra successivement les positions ABHGK, ABHL, ABD, etc.; et en supposant qu'il ne glisse pas sur la développée, le point C décrira la branche CDE de la développante, comme un point d'une droite tournant autour d'un centre fixe décrit une circonférence.

Il est clair que l'extrémité C d'un autre fil, enveloppé sur l'arc CNYU, décrirait semblablement la branche COV.

C'est cette propriété qui a fait donner aux lignes, telles que ABCN et VOCDE, les noms de développées et de développantes.

104. Étant donnée la développée ABCN, et sachant mener des tangentes à cette courbe, il sera facile de construire les branches CDE, COV, de la développante VOCDE. Pour cela, on mènera par des points G, H, B, etc., peu éloignés les uns des autres, des tangentes GK, HL, BD, etc.; on portera ensuite la longueur curviligne CG de G en K, la longueur curviligne

CGH de H en L, la longueur curviligne CGHB de B en D, et ainsi de suite : on joindra les points obtenus K, L, D, etc., par la ligne CKLD.... (*), et cette ligne sera l'une des branches de la développante cherchée. L'autre branche COZV, se construira par le même moyen ; et comme le choix du point C est arbitraire, on pourra, avec la même développée ABCN, construire une infinité de développantes. Pl. 7. Fig. 4.

105. Étant donnée une courbe plane quelconque VOCDE, on peut aussi la considérer comme une développante, et construire sa développée ABCN. En effet, concevons qu'on mène par tous les points de la courbe VOCDE des normales à cette courbe ; chaque normale sera coupée, par la normale précédente, en un point, et par la normale suivante en un autre point ; ces deux points comprendront un élément infiniment petit de cette normale, et la suite des élémens semblables de toutes les normales formera une courbe continue ABCN, qui leur sera tangente à toutes, et qui sera le lieu de leurs intersections consécutives. Or, je dis que cette courbe sera la développée de VOCDE. Pour le prouver, soient Zy, zy, deux normales consécutives de VOCDE, y le point où elles se coupent, Y le point où la première est coupée par la normale précédente, et Y′ celui où la seconde est coupée par la normale suivante : les droites infiniment petites Yy, yY', appartiendront à la courbe ABCN. Cela posé, imaginons qu'un fil enveloppé sur cette courbe vienne à se développer, il occupera, dans un certain instant de son mouvement, la position $XZyY'U$; l'instant d'après, il occupera la position $xzyY'U$: mais les côtés Zy, zy, du triangle mixtiligne infiniment étroit Zzy, dont les angles en Z et z sont droits, et dont l'angle en y est infiniment petit, sont égaux entre eux ; donc le point décrivant, qui dans le premier instant se trouvait en Z, sera en z dans le second, c'est-à-dire, que ce point n'aura pas quitté la ligne VOCDE. Et comme il en sera de même pour tous les autres instans, il en résulte que le point Z engendrera la développante VOCDE; d'où il suit que la courbe tangente à toutes les normales d'une autre courbe, est une développée de cette dernière.

D'après cela il ne s'agira, pour obtenir la développée d'une ligne donnée VOCDE, que de mener un nombre suffisant de normales à cette ligne ;

(*) Pour bien tracer la ligne CKLD, il faut beaucoup de soin et beaucoup d'habitude ; et il est nécessaire que les points K, L, D, etc. soient assez rapprochés les uns des autres pour b'en accuser la forme de cette ligne. L'art de bien mettre au trait une ligne courbe est indispensable à tous ceux qui veulent appliquer la Géométrie descriptive (129).

Pl. 7. Fig. 4. et la courbe ABCN, décrite de manière à les toucher toutes, sera cette développée (*).

106. Le cercle $\varphi Z\zeta$, qui a son centre Y au point de contact de la normale Zy et de la développée, passe par les élémens infiniment petits WZ, Zz, de VOCDE; car le point Y est l'intersection des perpendiculaires élevées sur les milieux de WZ et de Zz, ou, autrement dit, il est l'intersection des normales consécutives qui rencontrent les élémens WZ et Zz : donc ce cercle est le cercle osculateur en Z.

Il suit de là que la développée de la ligne plane VOCDE est le lieu des centres de courbure de cette ligne (**).

Il est clair d'ailleurs que le cercle osculateur φZz se trouve, par rapport aux élémens de contact WZ, Zz, d'un côté φ au dehors de la développante, et de l'autre côté ζ au dedans.

107. Nous conclurons de ce qui précède que chaque courbe plane a dans son plan une développée et une infinité de développantes qu'on sait construire quand on sait mener des tangentes à la courbe donnée. De chaque développante obtenue, on peut déduire encore une infinité de développantes, et ainsi de suite; en sorte qu'une seule courbe conduit à une famille immense de développantes.

Nous verrons dans le Complément (782), en nous occupant des développées des courbes à double courbure, qu'une courbe quelconque a aussi une infinité de développées, qui forment une famille aussi nombreuse que celle de ses développantes.

108. Mais il y a entre les développées et les développantes des différences à remarquer. Dans l'état actuel de la science, on ne sait pas déterminer, sans le secours de l'analyse, les points de contact des normales d'une courbe avec la développée de cette courbe (***). Il résulte de là, 1°. que la développante qu'on peut en déduire est connue par la détermination graphique d'autant de ses points qu'on en veut, tandis qu'on n'obtient la développée que par les tangentes de cette dernière, ce qui en rend le tracé fort difficile; 2°. qu'on ne peut pas construire synthétiquement les normales

(*) Il est assez difficile de décrire exactement des lignes qui ne sont déterminées que par leurs tangentes; cependant cela est quelquefois indispensable dans la pratique.

(**) Il n'en serait pas ainsi dans le cas où la ligne donnée serait à double courbure (772).

(***) On verra, dans le Complément (771), un moyen d'obtenir les points de contact des tangentes ZY, ON, etc.; mais c'est seulement pour le cas où la courbe ABCN est menée.

de la développée, et, conséquemment, qu'on ne peut pas déduire d'une développée, sa propre développée, et la développée de sa développée, etc. Pl. 7. Fig. 4.

109. Lorsque la courbe plane donnée est une circonférence de cercle, les deux branches CDE, COV, de la développante, sont symétriques par rapport à la droite QC, menée par le point C et par le centre de cette circonférence; chaque branche fait autour de ce centre une infinité de circonvolutions, dans lesquelles elle s'agrandit de plus en plus, et la développante prend le nom de *spirale développante du cercle*. C'est une courbe dont nous ferons fréquemment usage, et qu'il sera toujours facile de construire par le procédé du n° 104.

Passons maintenant à la théorie des hélices.

110. DES HÉLICES. Soit ABCDE une courbe quelconque tracée sur le plan horizontal. Prenons sur cette courbe une suite de points A, B, C, D..., et imaginons par ces points des verticales (A, A'A''), (B, KB'), (C, IC')...; puis concevons qu'une certaine courbe coupe toutes ces verticales en des points (A, A'), (B, B'), (C, C')..., tels que les hauteurs de ces mêmes points au-dessus du plan horizontal soient dans un rapport constant avec les arcs AB, AC, AD..., rectifiés : cette courbe sera ce qu'on appelle une *hélice*. Fig. 5.

Pour obtenir la projection verticale de cette hélice, voici les constructions qu'il faudra faire. On prendra sur un plan deux droites rectangulaires *ad*, *dd'*, ayant entre elles le rapport constant des hauteurs aux arcs; on mènera la droite *ad'*, puis on rectifiera les arcs AB, AC, AD..., de *a* en *b*, de *a* en *c*, de *a* en *d*, etc.; on élevera ensuite les droites *bb'*, *cc'*, *dd'*..., perpendiculairement sur *ad*, et ces droites seront les hauteurs, au-dessus du plan horizontal, des points de l'hélice qui se projettent en A, B, C, etc. Donc, si l'on porte *bb'* de K en B', *cc'* de I en C', *dd'* de K en D', et ainsi de suite, les points A', B', C', D'..., qu'on obtiendra, détermineront la projection verticale cherchée A'B'C'D'...

111. Il résulte de ces constructions que si l'on découpe le triangle *add'*, et qu'on place la ligne *dd'* sur (D, KD'), puis que l'on courbe le plan *add'* de manière que les longueurs *ab*, *bc*, *cd*..., s'appliquent sur leurs égales AB, BC, CD..., les points *a*, *b'*, *c'*..., viendront s'abattre en (A, A'), (B, B'), (C, C')..., et la ligne droite *ad'*, ainsi courbée, coïncidera avec l'hélice (ABC..., A'B'C'...), sans que la figure *add'* ait éprouvé ni déchirure ni duplicature. Il est évident que le seul changement que cette figure

Pl. 7. Fig. 5. aura subi, c'est qu'elle se sera divisée en trapèzes infiniment étroits $b'bcc'$, $c'cdd'$..., dont les plans auront tourné sur les arêtes bb', cc', dd'..., suivant lesquelles ces trapèzes se joignent, de façon que la ligne $abcde$... prenne la courbure ABCDE... Or, il est clair que dans ce changement, l'angle constant $b'ab$, que les élémens de ad' font avec ad, n'aura nullement varié; donc tous les élémens de la courbe (ABC..., A'B'C'...), font le même angle $b'ab$ avec le plan horizontal.

Cette propriété remarquable caractérise les hélices, et équivaut, comme on va voir, à leur définition (*). En effet, imaginons qu'on divise une hélice (ABC..., A'B'C'...), en arcs infiniment petits, et que l'on forme sur chaque arc élémentaire un triangle rectangle dont un côté soit vertical et l'autre horizontal; il est clair que tous ces triangles seront égaux entre eux, comme étant formés avec des hypothénuses égales, semblablement inclinées sur le plan horizontal. Or, il suit de là que si, à partir d'un point quelconque (A, A') de l'hélice, on prend deux arcs à volonté (AB, A'B'), (ABCD, A'B'C'D'), les projections horizontales AB, ABCD, de ces arcs, seront formées par autant de côtés horizontaux des triangles en question, que les hauteurs KB', KD', des extrémités (B, B'), (D, D'), de ces mêmes arcs au-dessus du point (A, A'), contiendront de côtés verticaux des mêmes triangles. Donc les hauteurs KB', KD', seront proportionnelles aux arcs AB, ABCD : ce qui est justement la définition dont nous sommes partis (110).

112. Puisque tous les élémens de l'hélice (ABC..., A'B'C'...), font le même angle $b'ab$ avec le plan horizontal, il sera aisé d'obtenir la tangente en un point donné (D, D') de cette hélice. Pour opérer de la manière la plus simple, voici ce qu'il faudra faire. On mènera par le point D de la projection horizontale de l'hélice, la droite DT tangente à cette projection, et cette droite sera nécessairement la projection horizontale de la tangente cherchée (90); on prendra DT égale à l'arc DCBA rectifié; on construira la projection verticale T' du point T; enfin, on mènera T'D', et la droite (TD, T'D') sera tangente en (D, D') à l'hélice (ABC..., A'B'C'...). En

(*) Il est clair que cette propriété convient à la ligne droite aussi bien qu'aux hélices c'est que la ligne droite est l'hélice qui correspond au cas où la ligne ABCD est elle-même une ligne droite. Malgré cela, on ne considère pas ordinairement une ligne droite comme appartenant à la famille des hélices, parce qu'on suppose toujours que la ligne ABCD... soit courbe.

effet, cette tangente doit être dans le plan projetant vertical qui a pour trace la tangente en D à la courbe ABC..., et elle doit faire, avec le plan horizontal, un angle égal à l'angle *b'ab* : or, la première condition est évidemment satisfaite; et quand à la seconde, il est facile de voir qu'elle l'est aussi, car on a cette proportion : l'arc ABCD, égal à TD, est à la hauteur KD' du point donné au-dessus du point (A, A'), comme *ab* est à *bb'*. Pl. 7. Fig. 5.

Il est clair que si l'on voulait développer sur DT, au lieu de l'arc DCBA, tout autre arc DCB commençant au point D, la tangente s'obtiendrait par les mêmes constructions, moyennant qu'on substituât au plan horizontal qui passe par le point (A, A'), celui qui contient le point (B, B'), correspondant à l'extrémité B de l'arc DCB.

113. Maintenant que nous savons mener des tangentes aux hélices, nous allons démontrer que ces courbes sont des courbes à double courbure dans tous les cas où la ligne ABCD... n'est pas une ligne droite. Pour cela, cherchons le lieu des points, tels que T, où les tangentes à l'hélice (ABC..., A'B'C'...) percent le plan horizontal. On sait, par ce qui a été dit plus haut, que le point T est sur la droite TD, tangente en D à ABCDE..., à une distance du point D égale à l'arc développé ABCD; d'où l'on voit que le lieu cherché est la développante ARTS de ABCDE... Mais si l'hélice était une courbe plane, ses tangentes seraient toutes dans un même plan; donc elles perceraient le plan horizontal suivant une droite : or, elles le percent suivant une développante; donc l'hélice est une courbe à double courbure.

114. On donne à la courbe ABCD..., au moyen de laquelle une hélice est construite, le nom de *base de l'hélice*. Et lorsque cette base est un cercle, comme dans le cas de la figure, on appelle la courbe (ABC..., A'B'C')..., *hélice à base circulaire*, la ligne verticale (O, A'X), *axe de l'hélice*, et la hauteur A'A'', comprise entre deux intersections consécutives de la courbe avec une verticale (A, A'A''), *pas de l'hélice*.

115. Nous ferons observer en passant qu'une hélice à base circulaire est entièrement déterminée quand on en connaît la base et le pas; car on sait alors que la projection AB d'un arc de cet hélice étant une certaine fraction de la base, cet arc s'élèvera, de l'extrémité (A, A') à l'extrémité (B, B'), de la même fraction du pas. On déduit aussi de ces données l'inclinaison de l'hélice, c'est-à-dire l'angle de sa tangente avec le plan horizontal : en effet, si l'on décrit un triangle rectangle, en portant la circon-

férence de la base sur une horizontale, et le pas sur une verticale, l'hypoténuse de ce triangle aura l'inclinaison cherchée.

116. Ces considérations, en même temps qu'elles nous font connaître les hélices, nous font connaître encore une autre espèce de courbes : ce sont les projections verticales des hélices dont les bases sont des cercles. On désigne ces courbes sous le nom de *sinusoïdes* (*).

Pl. 7. Fig. 5. Il est évident qu'elles s'étendent à l'infini suivant l'axe A'X, et qu'elles le coupent en une infinité de points A', E', A'', etc. Comme on sait mener une tangente T'D' en un point quelconque D' d'une de ces courbes (112), il est aisé de voir que la courbure d'une sinusoïde change de sens aux points A', E', A'', etc., où elle coupe l'axe A'X. Ces points s'appellent, par cette raison, des *points d'inflexion*. Ils reçoivent, dans le cas particulier des sinusoïdes, le nom de *points de serpentement*.

117. Nous savons donc maintenant, au moyen de ce qui précède, et au moyen de la Note 1re, construire des lignes d'une infinité d'espèces, savoir : des cercles, des ellipses, des hyperboles, des paraboles; des spirales développantes de cercles; des hélices à bases circulaires; des sinusoïdes; des développantes de cercles, d'ellipses, d'hyperboles et de paraboles; des développantes de ces développantes, et une infinité de développantes d'autres développantes; enfin, toutes les hélices qui auraient pour bases des courbes des espèces précédentes.

De plus, nous savons mener des tangentes à toutes ces lignes, lorsque le point de contact de la tangente demandée nous est donné. Mais, comme il faut souvent mener des tangentes sans avoir leur point de contact, il est convenable que nous rangions parmi les questions que nous avons à résoudre sur les lignes courbes, plusieurs problèmes relatifs aux tangentes.

118. PROBLÈMES SUR LES TANGENTES *et sur les lignes courbes en général*. On a besoin de déterminer les tangentes dans trois cas princi-

---

(*) Ce nom est tiré de leur équation, qu'il est facile d'obtenir. Prenons A'X pour axe des abscisses, et A'Y pour axe des ordonnées. Abaissons B'P et Bp perpendiculairement sur A'X et sur AO; Bp sera ce qu'on nomme le *sinus* de l'arc AB, et nous aurons PB' $=$ pB $=$ *sin arc* AB; et comme le rapport de l'arc AB à la hauteur KB', égale à A'P, est constant (110), on aura, en appelant m ce rapport, *arc* AB $= m \times$ KB'. En désignant donc suivant l'usage A'P par x, et PB' par y, il viendra : PB' $=$ *sin* mx, ou $y =$ *sin* mx, qui est l'équation cherchée. Elle exprime, comme on voit, que l'ordonnée est le sinus d'un multiple de l'abscisse.

paux, lorsque le point de contact est connu; lorsqu'on connaît un point de la tangente, et enfin lorsqu'on connaît sa direction, c'est-à-dire une droite qui lui soit parallèle.

Le premier cas a été traité n° 94; ainsi, nous n'avons à nous occuper que des deux derniers. Avant d'aller plus loin, voyons s'il est toujours possible de mener, par un point, ou parallèlement à une droite arbitrairement choisie, une tangente à une courbe donnée.

119. Pour cela, concevons dans l'espace une ligne courbe quelconque, et imaginons menées, indéfiniment en tous sens, toutes les tangentes de cette courbe; il est évident que ces tangentes formeront une surface particulière, qui sera le lieu de tous les points des tangentes de la courbe en question. Donc, pour qu'on puisse mener par un point donné une tangente à cette courbe, il faudra nécessairement que ce point soit dans la surface des tangentes; et s'il s'agit de mener une tangente à la courbe, parallèlement à une droite donnée, il faudra que cette droite ait une parallèle située sur la même surface des tangentes.

Si la courbe donnée était plane, par exemple, le lieu des tangentes serait le plan de la courbe, et pour qu'il y eût une tangente qui passât par un point donné hors de la courbe, ou qui fût parallèle à une droite donnée, il faudrait que le point donné fût dans le plan de la courbe, ou que la droite donnée fût parallèle à ce plan.

120. Il suit de là que s'il s'agit de mener par un point une tangente à une courbe, ce point ne pourra être donné que par une seule de ses projections, et la seconde projection s'ensuivra; car si on se le donnait par ses deux projections, la tangente demandée n'existerait pas, à moins que, par hasard, ce point ne se trouvât sur la surface des tangentes.

De même, si la tangente demandée devait être parallèle à une droite donnée, et qu'il n'existât pas entre cette droite et la courbe de relations particulières, d'après lesquelles la droite dût avoir une parallèle sur la surface des tangentes, on ne pourrait se donner que l'une des projections de la droite, et l'autre s'ensuivrait.

Cela posé, passons à la résolution des problèmes que nous avons annoncés au n° 117.

121. PROBLÈME 1. *Mener une tangente à une ligne courbe* (ACB, A'C'B'), *par un point de l'espace dont la projection horizontale* M *soit connue.* Pl. 8. Fig. 1.

Puisqu'on sait mener des tangentes à la courbe (ACB, A'C'B')(94), lorsque

Pl. 8. Fig. 1. le point de contact de ces tangentes est donné, on en saura mener dans le même cas aux projections ACB, A'C'B', de cette courbe (90), et l'on pourra en déduire leurs normales (93). Or, il résulte de là un moyen facile de mener la tangente demandée.

Prenons sur ACB une suite de points a, a', a''..., et menons par ces points les droites ab, $a'b'$, $a''b''$..., normales à ACB. Par le point M abaissons sur ces normales les perpendiculaires Mb, Mb', Mb''..., et décrivons le lieu $bb'b''b'''$... des points où se rencontrent chaque normale et la perpendiculaire correspondante. Ce lieu contiendra nécessairement le point de contact C de la tangente cherchée; car la normale suivant ce point, et la perpendiculaire abaissée du point M sur cette normale, ont pour intersection commune ce même point de contact : donc il sera l'intersection de la projection ACB et de la courbe $bb'b''b'''$... Donc enfin, si l'on mène par cette intersection et par le point M, la ligne droite MC, cette ligne sera la projection horizontale de la tangente demandée.

Ayant trouvé la projection horizontale C du point de contact, sa projection verticale C' s'ensuivra; et en menant la droite C'M', tangente en C' à la courbe A'C'B', on aura la tangente demandée (CM, C'M').

Si l'on mène par le point M la droite MM' perpendiculaire à la ligne de terre, elle coupera C'M' en un point M', qui sera la projection verticale du point donné. On voit par là que le point (M, M') était complètement déterminé par la seule projection M (120).

Fig. 2. 122. *Problème* 2. *Étant donnée une courbe* (ACB, A'C'B'), *et connaissant la projection horizontale* PQ *d'une ligne droite; on demande de mener à la courbe donnée une tangente dont la projection horizontale soit parallèle à* PQ.

Menons d'abord une ligne droite tangente à la projection horizontale ACB et parallèle à PQ. Pour cela, nous prendrons sur cette projection plusieurs points a, a', a''...; par chacun d'eux nous mènerons les tangentes ab, $a'b'$, $a''b''$... à la courbe ACB; nous porterons sur ces tangentes, à partir des points de contact a, a', a''..., et d'un même côté de ces points, une longueur arbitraire $ab = a'b' = a''b''$ = etc. Par les points obtenus b, b', b''..., nous mènerons les droites bd, $b'd'$, $b''d''$..., parallèles à PQ, et nous prendrons sur ces droites, du côté où quelques-unes d'entre elles coupent la courbe ACB, les longueurs bd, $b'd'$, $b''d''$..., égales à ba. Enfin, par les points d, d', d''..., extrémités de ces longueurs, nous mè-

nerons la courbe auxiliaire $dd'd''$... : cette courbe coupera évidemment la projection ACB; et je dis que le point d'intersection C, sera le point de contact de la tangente cherchée CM. En effet, la courbe auxiliaire $dd'd''$... est le lieu d'une suite de points d, d', d''..., qui forment avec leurs correspondans a et b, a' et b', a'' et b''..., une suite de triangles isoscèles abd, $a'b'd'$, $a''b''d''$...; or, celui de ces triangles qui répond à la tangente CM, a son angle en b nul; donc, pour ce triangle, le point d de la courbe $dd'd''$... coïncide avec le point de contact a: donc, etc. Pl. 8. Fig. 2.

Connaissant le point C, on en déduira la tangente CM, et l'on obtiendra la tangente demandée (CM, C'M'), en menant par la projection verticale C' du point de la courbe donnée projeté horizontalement en C, la tangente C'M' (*).

123. *Problème* 5. *Une courbe* (ABC, A'B'C') *étant donnée avec un plan* (DE, EF), *on demande leurs points d'intersection.* Fig. 3.

Pour résoudre ce problème, nous concevrons par la projection horizontale ABC de la courbe donnée, une suite de verticales; elles formeront une des deux surfaces projetantes de la courbe donnée, et cette surface contiendra tous les points de cette courbe : donc elle contiendra les points cherchés. Mais le plan (DE, EF) contient aussi ces points; donc ils sont sur l'intersection de ce plan avec la surface en question : donc les points cherchés sont communs à cette intersection et à la courbe donnée. Or, il devient, d'après cela, aisé de les trouver.

Cherchons d'abord la courbe d'intersection du plan (DE, EF) avec les verticales qui ont leurs pieds sur ABC. Il est clair que cette courbe aura la ligne ABC pour projection horizontale : construisons donc sa projection verticale. Pour cela, nous mènerons une suite de plans verticaux, comme (GK, KK'), dont les traces horizontales GK soient parallèles à DE; chacun d'eux coupera la surface qui est formée par les verticales dont les pieds sont sur ABC, suivant l'une (G, gG') de ces verticales, et le plan (DE, EF), suivant une horizontale (KG, K'G') facile à déterminer. Ces deux droites (G, gG'), (KG, K'G'), se rencontreront en un point (G, G'), qui sera l'intersection de la verticale (G, gG') avec le plan (DE, EF); donc, si l'on mène une courbe D'B'L', par les projections verticales de tous les points

(*) Pour bien connaître la méthode qui vient de servir à la résolution des deux derniers problèmes, voyez la Note 3.

Pl. 8. Fig 3. obtenus comme (G, G′), cette courbe sera la projection verticale de l'intersection cherchée.

Nous connaissons donc maintenant deux lignes (ABC, A′B′C′), (ABC, D′B′L′), qui contiennent les points demandés; et comme elles ont même projection horizontale ABC, ces points seront nécessairement ceux qui auront pour projections verticales, les points d'intersection des deux projections A′B′C′, D′B′L′.

Dans le cas de la figure, ces projections ne se coupent qu'en un seul point B′, qui correspond au point B de la projection horizontale; donc le plan (DE, EF) n'est percé par la courbe (ABC, A′B′C′) que suivant le seul point (B, B′).

124. *Exécution de l'épure*. La partie (ADB, A′B′) de la courbe donnée est évidemment vue sur les deux projections : ainsi les lignes ADB, A′B′, doivent être pleines. La partie inférieure (BC, B′C′) de la même courbe est sous le plan donné, si on la considère par rapport au plan horizontal, et derrière ce plan, si on la considère par rapport au plan vertical, les arcs BC et B′C′ doivent en conséquence être ponctués (56). Quant à la courbe D′B′L′ et aux autres lignes de l'épure, ce sont des lignes de construction.

125. *Scholie* 1er. Les constructions au moyen desquelles le problème précédent vient d'être résolu, auraient pu être faites au moyen de la courbe ABC, comme elles l'ont été au moyen de la courbe A′B′C′. Alors la surface projetante employée, au lieu d'être formée par les verticales dont les pieds sont sur ABC, aurait été formée par des horizontales perpendiculaires au plan vertical suivant les points de A′B′C′, et l'on aurait trouvé pour résultat le même point (B, B′) obtenu par les premières constructions. On peut par conséquent user, dans la pratique, de deux moyens équivalens qui se servent mutuellement de vérification.

126. *Scholie* 2. Supposons que le plan donné soit l'un des plans de projection, le plan horizontal, par exemple. La surface projetante qui, dans la solution générale, coupe le plan donné suivant (ABC, D′B′L′), coupera le plan horizontal suivant la ligne (ABC, EC′), la ligne D′B′L′ sera conséquemment remplacée par EC′, et les opérations qui donnaient le point B′ donneront le point C′. En élevant donc par ce dernier point la droite CC′ à angle droit sur EC′, on obtiendra la trace horizontale (C, C′) de la courbe donnée. C'est ce qu'on savait déjà (86).

127. *Scholie* 3. Supposons que le plan donné soit perpendiculaire à l'un des plans de

projection, par exemple, au plan horizontal; et soit (AB, AC) le plan donné, et (MNP, M'N'P') la courbe donnée. La surface projetante verticale de cette courbe coupera le plan (AB, AC) suivant les verticales (M, MM'), (P, PP'), dont les pieds sont en M et P; ces verticales remplaceront la courbe auxiliaire (ABC, D'B'L') de la fig. 3; et elles contiendront par conséquent les points cherchés; donc ces points se projetteront horizontalement en M et P. Quant à leurs projections verticales M' et P', elles s'ensuivent des projections horizontales, et d'ailleurs les lignes MM' et PP', qui remplacent la courbe D'B'L' de la fig. 3, coupent la ligne M'N'P' suivant ces projections verticales. Pl. 8. Fig. 4

Si le plan donné était perpendiculaire au plan vertical, les constructions seraient tout-à-fait semblables. D'où l'on voit que les intersections d'une courbe donnée, et d'un plan perpendiculaire à l'un des plans de projection, se déterminent avec une extrême facilité.

128. *Problème 4. Une courbe et un point étant donnés, on demande les plans normaux à cette courbe menés par le point donné.*

Pour résoudre ce problème, imaginons qu'on prenne une suite de points sur la courbe donnée; que l'on mène par ces points des tangentes à cette courbe; que l'on abaisse, par le point donné, des plans perpendiculaires à ces tangantes; que l'on détermine les points d'intersection de chaque tangente et du plan perpendiculaire correspondant; et enfin que l'on mène une ligne courbe auxiliaire par ces points. Cette ligne étant le lieu des points de l'espace où chaque tangente est coupée perpendiculairement par un plan passant par le point donné, elle contiendra évidemment les points de la courbe donnée suivant lesquels les plans demandés sont normaux à cette courbe; donc ces points seront communs à la courbe auxiliaire et à la courbe donnée. Il est clair, d'après cela, qu'ils seront connus dès que la courbe auxiliaire sera décrite. Or, quand on connaîtra ces points, on mènera les tangentes correspondantes, on abaissera ensuite par le point donné des plans perpendiculaires à ces tangentes, et ces plans seront les plans demandés.

Nous laissons au lecteur le soin de faire les constructions.

129. Il y aurait encore un grand nombre de problèmes à résoudre sur les lignes considérées par rapport aux points, aux droites et aux plans; mais il est temps de nous occuper des surfaces. Toutefois, nous ferons remarquer, avant de quitter ce chapitre, que les quatre problèmes précédens n'exigent pas seulement que l'on trace les courbes qui servent à représenter les données; leurs solutions exigent encore que l'on sache mettre au trait, avec beaucoup d'exactitude, une courbe auxiliaire déterminée par des points. Plus nous avancerons et plus nous reconnaîtrons que pour opérer sur les grandeurs géométriques, il est nécessaire de savoir bien dessiner les lignes courbes. D'après cela, les commençans doivent, par l'exercice, se former l'œil et la main à ce genre de dessin (912—917).

LIVRE II.

SURFACES COURBES.

CHAPITRE PREMIER.

Du mode de représentation des surfaces courbes.

130. Les projections des lignes droites et les projections des lignes courbes, fournissent, comme on l'a vu dans les Préliminaires, des représentations rigoureuses de ces grandeurs. Ces représentations sont telles, que si l'on mène une droite perpendiculaire à la ligne de terre, cette droite coupe les deux projections d'une ligne droite, ou les deux projections d'une ligne courbe, en deux points, qui sont les deux projections d'un même point de la droite ou de la courbe représentée, et qui représentent ce point (16 et 19).

Il suit de là que, dans le mode de représentation des lignes droites et des lignes courbes, chaque point de ces lignes est réellement représenté.

Il ne peut pas en être ainsi pour les surfaces; car il faudrait pour cela, non-seulement que les projections de chacun de leurs points fussent indiquées sur les plans de projection, mais encore que les deux projections d'un même point eussent des marques particulières qui indiquassent leur dépendance. Or, l'usage que nous avons déjà fait de la méthode des projections montre suffisamment qu'un semblable mode de représentation serait impraticable, et qu'il n'aurait aucune fécondité.

131. Aussi avons-nous représenté le plan, qui est la plus simple des surfaces, au moyen de ses intersections avec les plans de projection, et non pas au moyen des projections de ses points. Il s'agit donc de trouver, pour les surfaces en général, un mode de représentation analogue à celui qu'on emploie pour représenter le plan. C'est à quoi vont nous conduire les considérations suivantes.

132. Concevons une ligne dans l'espace, et imaginons qu'elle prenne un mouvement quelconque; il est clair que le lieu de ce mouvement sera ce qu'on appelle une *surface*. Si la ligne en question est une droite, par exemple,

et que le mouvement imprimé soit tel que la droite mobile suive une droite fixe en restant constamment parallèle à sa *position* (*) primitive, la surface produite sera un plan. Et si la ligne mobile est un cercle, et qu'il se meuve autour d'un de ses diamètres, la surface produite aura tous ses points à la même distance du centre de ce cercle, et sera ce qu'on appelle une *sphère*.

Lorsqu'une ligne en se mouvant décrit ainsi une surface, on dit qu'elle *engendre* cette surface. On donne à la ligne mobile le nom de *génératrice*, et l'on désigne, sous celui de *génération*, chaque manière particulière d'engendrer une surface par le mouvement d'une ligne.

133. Il est facile d'indiquer sur une surface connue plusieurs espèces de générations. Le plan, par exemple, peut être produit par une droite mobile sur deux autres droites menées par un même point, ou par une droite passant toujours par un point fixe et se mouvant sur une droite fixe, ou par une droite, mobile autour d'un point fixe, de manière qu'elle fasse constamment des angles égaux avec deux droites menées par ce point.

134. Dans chacune de ces générations, la ligne génératrice est constante de forme, puisque c'est toujours une ligne droite; mais il arrive quelquefois qu'on engendre une surface par le moyen d'une ligne variable de figure en même temps qu'elle varie de position.

Imaginons dans l'espace un cercle vertical, et concevons qu'un cercle horizontal mobile ait successivement pour diamètre toutes les cordes horizontales du cercle vertical; on voit que le cercle mobile variera de rayon, et par conséquent de figure, à mesure qu'il changera de hauteur, et qu'il décrira dans son mouvement une surface sphérique.

135. Concevons maintenant une surface quelconque soumise à la loi de continuité (**), et coupons-la par un plan horizontal; la section sera aussi

(*) Nous prendrons souvent une position d'une ligne mobile ou d'une surface mobile, pour cette ligne ou cette surface dans cette position : nous croyons que le discours en sera tout-à-la-fois plus clair et plus concis.

(**) On dit qu'une surface ou qu'une ligne est soumise à la *loi de continuité*, lorsque tous les points de cette surface ou de cette ligne satisfont à une seule et même définition. Ainsi une sphère est une surface soumise à la loi de continuité, parce que tous ses points satisfont à la condition adéquate d'être à une distance donnée de son centre. Un arc de cercle est, par la même raison, une courbe soumise à la loi de continuité. Mais une ligne qui serait formée de plusieurs arcs, ne serait point soumise à cette loi, parce que la condition à laquelle satisferaient les points d'un arc, ne serait pas identiquement la même que celle à laquelle satisferaient les points d'un autre arc.

une ligne soumise à la loi de continuité, et cette section qui, dans des cas particuliers, pourrait être absolument la même, quelle que fût la hauteur du plan coupant, variera en général de grandeur, selon la hauteur de ce plan. Or, si l'on imagine qu'elle se meuve suivant des lois convenables pour qu'elle coïncide, à chaque hauteur, avec la surface donnée, il est clair que, dans son mouvement, elle engendrera cette surface.

Pour donner l'idée d'une autre génération, imaginons que la surface quelconque donnée ait une position fixe dans l'espace, et concevons qu'un point soit déterminé invariablement par rapport à cette position. Si l'on suppose qu'une sphère variable de rayon ait pour centre ce point, chaque surface sphérique individuelle coupera la surface donnée suivant une certaine ligne; la nature de cette ligne dépendra de celle de la surface donnée, et, lorsque l'on connaîtra le rayon de la sphère variable, la forme et la position de la même ligne s'ensuivront. Si donc on fait varier le rayon de la sphère depuis zéro jusqu'à l'infini, cette ligne, d'après les variations de ce rayon, se mouvra en changeant à la fois de forme et de position, de manière à produire la surface donnée.

136. Il est clair qu'on peut imaginer pour chaque surface un nombre infini de ces générations, dans lesquelles les génératrices seraient constantes de forme, en variant de position, ou variables à la fois de forme et de position.

Et quelle que soit l'une de ces générations, il est évident qu'il suffira, pour la déterminer, de donner trois choses, savoir : la génératrice; la loi de son mouvement; et, si elle n'est pas constante de forme, la loi de ses variations de forme. Éclaircissons ceci par un exemple.

137. Soit A un point de l'espace par lequel on ait mené une droite verticale D (*). Concevons qu'un cercle horizontal varie de manière que son centre soit toujours sur la droite D, et que son rayon, à chaque instant du mouvement, se trouve égal à la distance de ce centre au point A : on se figurera aisément la forme de la surface engendrée (**), et sa génération

(*) Il nous arrivera souvent, comme ici, de nommer des grandeurs par des lettres qui ne se rapporteront à aucune figure : dans ce cas on s'apercevra qu'il ne faut pas recourir aux planches, soit à ce que l'indication de la figure ne sera pas à la marge, soit à ce que des lignes ou des surfaces, dont la désignation exige toujours plusieurs lettres sur la gravure, seront nommées dans le texte au moyen d'une seule lettre.

(**) Ce sera ce qu'on appelle un *cône droit* (208).

se trouvera déterminée par trois conditions; 1°. que la génératrice soit un arc horizontal; 2°. que le centre de ce cercle se trouve toujours sur la verticale D; 3°. que le rayon de ce même cercle soit toujours égal à la distance de son centre au point A.

138. Dans la plupart des surfaces que l'on emploie dans les arts, la génératrice est constante de forme, et la loi de son mouvement est donnée par la condition qu'elle soit située d'une manière déterminée par rapport à des lignes, des surfaces, ou des plans connus, auxquels on donne les noms de *lignes directrices*, *surfaces directrices*, et *plans directeurs*.

Le plus souvent la génératrice s'appuie sur des lignes directrices, comme lorsqu'on engendre un plan par une de ses traces en mouvement parallèlement à elle-même le long de l'autre trace, ou une sphère par le mouvement d'un cercle autour d'un de ses diamètres.

Nous verrons des cas où la génératrice est une droite, et où elle doit toucher constamment plusieurs lignes, ou les rencontrer sous des angles donnés, ou toucher plusieurs surfaces, ou être toujours parallèle à un plan, etc. La suite fera connaître, parmi ces différentes manières d'engendrer les surfaces, celles qui présentent quelque intérêt.

139. Ce qui précède étant bien entendu, on sentira qu'une définition de surface ne peint d'ordinaire à l'esprit l'objet qu'elle définit, que lorsqu'elle énonce une génération de cette surface.

Pour développer cette vérité, soient A et B deux points fixes connus, et soit M un point mobile éloigné du point A de la distance variable α, et du point B de la distance variable β. On peut dire que la surface qui est le lieu des positions du point M, telles que α égale constamment β est un plan; et que celle qui est le lieu des positions du point M, telles que la droite α soit constamment perpendiculaire à la droite β est une sphère. Mais ces définitions n'indiquent aucune génération, et ne donnent d'abord l'idée ni du plan ni de la sphère.

Cependant, elles appartiennent bien à ces deux surfaces. En effet, concevons par les deux points A et B un plan quelconque : toutes les positions du point M qui seront situées dans ce plan, et qui satisferont à la première définition, formeront une ligne droite perpendiculaire sur le milieu de AB; et toutes celles qui satisferont à la seconde, formeront un cercle dont AB sera l'un des diamètres. D'après cela, les deux définitions précédentes équivalent à celles qui suivent :

Le plan est le lieu d'une suite de droites perpendiculaires sur le milieu d'une droite AB. La sphère est le lieu d'une suite de cercles, ayant une droite AB pour diamètre commun. Ou, ce qui revient au même, le plan est engendré par le mouvement d'une droite constamment perpendiculaire en un point d'une droite fixe, et la sphère est engendrée par un cercle en mouvement sur un de ses diamètres. Or, ces dernières définitions conviennent au plan et à la sphère, et les peignent à l'esprit.

Maintenant que l'on doit avoir des idées claires des générations des surfaces et de l'utilité de ces générations, passons à l'exposition du moyen qu'elles procurent pour représenter les surfaces.

140. Supposons d'abord que le mouvement d'une génératrice constante ou variable de forme, soit donné par la condition qu'elle s'appuie sur une directrice connue, en restant constamment placée sur cette directrice d'une manière déterminée, comme si, par exemple, ces lignes devaient se couper à angle droit, et que la tangente à la génératrice au point d'intersection dût être parallèle à un plan donné.

On commencera par tracer les projections de la directrice : à chaque point de cette courbe il correspondra une position de la génératrice; on représentera autant de ces positions que cela sera nécessaire, et l'on aura la représentation de la surface.

Il est aisé de voir qu'on pourra déduire d'une telle représentation autant de points de la surface représentée qu'on en voudra, et que les projections des diverses positions de la génératrice auront des formes particulières qui accuseront la forme de cette surface. La suite nous montrera que ce mode de représentation se prête à toutes les opérations possibles, et que chaque projection jouit de l'utile proprieté de faire image.

141. Si la loi du mouvement de la génératrice n'est pas donnée au moyen d'une directrice qu'elle doive rencontrer; avec le secours de cette loi, quelle qu'elle soit, on représentera la génératrice, dans autant de ses positions qu'on en voudra, soit qu'elle soit constante de forme en variant de position, soit qu'elle soit à la fois variable de forme et de position : d'où l'on voit que le mode de représentation dont nous nous occupons s'applique à tous les cas.

Montrons actuellement l'usage qu'on peut faire de ce mode. Nous serons conduits à des conséquences importantes, et, par suite, à quelques moyens de le rendre plus propre à son objet et à l'exécution de projections bien intelligibles.

142. Une surface étant représentée par le moyen que l'on vient d'indiquer, il sera toujours facile de construire son intersection avec un plan donné. En effet, ayant un nombre suffisant de positions de la génératrice, on cherchera les points d'intersection de chacune de ces positions avec le plan donné, et ces points appartiendront à l'intersection de ce même plan avec la surface en question. En menant donc une première ligne courbe par toutes les projections verticales des points d'intersection obtenus, une se-

conde courbe par toutes leurs projections horizontales, on aura, avec toute l'exactitude que l'on pourra désirer, les deux projections de la ligne d'intersection cherchée.

143. Si le plan coupant était perpendiculaire à l'un des deux plans de projection, les constructions deviendraient extrêmement simples. Supposons-le perpendiculaire au plan vertical, par exemple, et nommons T sa trace verticale. Tous les points qu'il contiendra se projetteront verticalement sur cette trace; donc elle sera la projection verticale de l'intersection cherchée. Désignons par A, B, C..., les projections horizontales des diverses positions de la génératrice, et par A', B', C'..., les projections verticales correspondantes. Les courbes A', B', C'... couperont la trace T en une suite de points a', b', c'..., qui seront des projections verticales de points de cette intersection. Si donc on rapporte les points a', b', c'..., en projection horizontale en a, b, c..., sur les courbes respectives A, B, C..., et qu'on mène la ligne abc..., cette ligne sera la seconde projection de la courbe cherchée (abc..., $a'b'c'$...).

144. D'après cela, deux surfaces quelconques étant représentées sur les plans de projection, on pourra déterminer leur intersection commune. Pour cela, on mènera une série de plans auxiliaires quelconques, de plans horizontaux, par exemple; chacun d'eux coupera l'une des surfaces données suivant une première courbe, l'autre surface suivant une deuxième courbe; on construira facilement ces courbes, et les points où elles se rencontreront appartiendront à l'intersection cherchée. Donc, si l'on décrit convenablement une première ligne qui contienne les projections horizontales de ces points, puis une seconde ligne qui contienne leurs projections verticales, ces deux lignes représenteront cette intersection.

145. Si l'on conçoit dans l'espace deux surfaces qui se coupent, si l'on conçoit leur intersection commune, et si l'on cherche à se figurer leurs situations respectives auprès de cette intersection, on sera conduit à se demander les différens angles sous lesquels elles se coupent.

Or, de même qu'une ligne courbe quelconque peut être considérée comme un polygone dont les côtés sont infiniment petits (89), on peut aussi considérer une surface courbe, comme un polyèdre composé d'une infinité de facettes infiniment petites, telles que l'angle que font entre elles deux facettes consécutives, diffère infiniment peu de deux droits. Et si l'on imagine qu'une de ces facettes élémentaires soit prolongée indéfiniment dans tous les sens, il en résultera évidemment un plan qui touchera cette

surface suivant l'élément qui aura été prolongé; et ce plan sera ce qu'on appelle un *plan tangent* de la surface en question.

On donne à l'élément qui est commun au plan et à la surface, le nom de *point de contact* ou d'*élément de contact*.

146. Cela posé, il est clair qu'on aura l'angle que font entre elles deux surfaces en un point de leur intersection, en construisant celui que font entre eux les deux plans tangens à ces surfaces en ce point. Ce moyen d'obtenir un tel angle ne peut faire connaître encore que bien imparfaitement l'utilité des plans tangens; mais cette utilité sera suffisamment développée par la suite. Voyons maintenant comment se construisent ces plans.

147. Concevons par un point quelconque d'une surface, une infinité de courbes situées sur cette surface, et les tangentes à toutes ces courbes; le plan tangent au point dont il s'agit sera le lieu de toutes ces tangentes. En effet, par cela seul que ces courbes passent par le point de contact du plan tangent, elles traversent la facette commune à ce plan et à la surface; elles ont, conséquemment, un élément rectiligne compris dans cette facette: mais la tangente à chaque courbe est cet élément rectiligne prolongé (89); donc cette tangente est dans le plan tangent, puisque ce plan n'est autre chose que la facette prolongée (145). Donc, etc.

148. Et comme deux droites suffisent pour déterminer un plan, il ne s'agira, *pour avoir le plan tangent en un point d'une surface, que de mener par ce point deux tangentes à deux courbes connues sur la surface et passant par ce même point.*

149. Il est clair que si les deux courbes avaient une même tangente, le plan tangent resterait indéterminé.

Et si ce point de contact était sur une *ligne multiple*, c'est-à-dire suivant laquelle la surface se coupât elle-même, cette surface aurait en ce point plusieurs plans tangens, et deux tangentes à deux courbes menées par le point de contact, pourraient ne pas appartenir au même plan tangent; elles détermineraient alors un plan coupant et non tangent (712 note.)

150. Toutefois, de ce qu'un plan coupe une surface, on ne peut pas conclure qu'il ne soit pas tangent à cette surface; la suite nous en donnera de nombreux exemples (*voyez* les problèmes des n°s 300 et 306). Sous ce rapport, une portion de surface est ce qu'on appelle *convexe* lorsqu'elle n'est pas coupée par ses plans tangens; et on la nomme *non-convexe* quand au contraire ces plans la coupent et la touchent tout-à-la-fois.

La propriété qu'on vient de voir n° 147 est de la plus grande impor-

tance, parce qu'elle conduit (148), dans presque tous les cas usuels, à la construction du plan tangent.

151. Supposons, par exemple, qu'il s'agisse de mener par un point d'une sphère un plan tangent à cette sphère. On concevra qu'elle soit engendrée par un cercle mobile autour d'un de ses diamètres, et l'on remarquera que chacun des points de la génératrice décrit, dans le mouvement qui produit la sphère, un cercle perpendiculaire à la charnière. D'après cela on conçoit qu'il sera facile de mener par le point de contact donné, 1°. une position de la génératrice; 2°. le cercle, perpendiculaire à la charnière, correspondant au point de contact. On aura donc deux lignes qui se croiseront en ce point; on leur menera des tangentes par ce même point, et le plan tangent cherché sera déterminé.

152. Les plans tangens offrent un moyen graphique de mener des tangentes aux lignes d'intersection des surfaces; car un point de l'intersection de deux surfaces étant sur un élément rectiligne de cette intersection, et cet élément étant lui-même l'intersection des deux facettes correspondantes de ces surfaces, l'élément rectiligne prolongé est l'intersection des facettes prolongées; c'est-à-dire que *la tangente en un point de l'intersection de deux surfaces est la ligne droite suivant laquelle se coupent les plans tangens à ces surfaces en ce point.*

153. Parmi les intersections de surfaces, il y a une classe de lignes dont on fait un grand usage dans la Géométrie descriptive : ce sont leurs intersections avec les plans de projection. On donne le nom de *traces* à ces intersections. Ces traces n'étant autre chose que la suite des points où les diverses positions de la génératrice percent les plans de projection, elles s'obtiennent avec une grande facilité (126). Et comme c'est à ces plans que l'on rapporte les positions de toutes les grandeurs, les traces, en général, aident puissamment à se bien figurer la situation d'une surface représentée.

Cette fonction les rend très utiles, aussi les indique-t-on toujours sur une représentation soignée. On verra qu'il y a des cas simples où elles pourraient suffire seules pour représenter une surface, et pour qu'on pût faire sur cette surface toutes les opérations possibles (210 et 606).

154. Les contours qui enferment les projections des points d'une surface jouissent, encore plus pleinement que les traces, de la propriété de suffire quelquefois seuls à la représentation de cette surface; ce sont des espèces de profils qui dessinent les formes représentées, et qui, jusqu'à un certain point, en donnent le sentiment (204).

Puisque ces contours enferment sur chaque plan de projection l'espace où se projettent les points d'une surface, il est facile en général de les déterminer; en effet, ayant représenté la génératrice dans un nombre suffisant de ses positions, les lignes telles que $nn'n''n'''$, qui toucheront et enfermeront les projections mnp, $m'n'p'$, $m''n''p''$..., correspondantes à ces positions, seront les contours cherchés. Nous verrons dans la suite (387) un autre moyen de les déterminer.

Pl. 9. Fig. 1.

Ces contours sont quelquefois des lignes droites, et, pour l'ordinaire, ils s'obtiennent alors fort aisément.

155. Lorsque la génératrice d'une surface est composée de branches séparées, comme celles d'une hyperbole, par exemple, sa surface est souvent formée de parties distinctes, ou même isolées, qu'on nomme *nappes* (228 note, et 897), et il en résulte naturellement qu'il y a pour chaque nappe un contour particulier; mais cette circonstance, comme on l'apprendra par la suite, ne change rien à la manière de construire les contours.

156. Nous conclurons de tout ce qui précède, qu'en général pour représenter une surface, il faut,

Premièrement, construire les projections d'un nombre suffisant de positions de sa génératrice.

Secondement, construire les traces de cette surface, c'est-à-dire, la série des points où les diverses positions de la génératrice percent les plans de projection.

Troisièmement, construire sur chaque plan de projection le contour qui enferme l'espace où se projettent les points de la surface, ou, ce qui revient au même, la ligne $nn'n''n'''$, qui enveloppe sur ce plan toutes les positions possibles mnp, $m'n'p'$, $m''n''p''$..., de la génératrice (154).

On ajoute ordinairement à l'effet de la représentation, en indiquant les lignes multiples (149), les *arêtes de rebroussement* (251), et généralement les points et les lignes qui jouissent de propriétés remarquables sur les surfaces, et que, par cette raison, on appelle leurs *points singuliers* et leurs *lignes singulières*.

Mais dans beaucoup de cas, on se borne à construire les contours des projections, ou bien les contours, les traces, et les positions les plus importantes de la génératrice.

157. Ce qui donne au mode de représentation dont nous nous occupons un de ses principaux avantages, celui de rendre les projections propres à

faire image, c'est la manière de mettre au trait les lignes des épures. Elle découle des principes que nous avons exposés dans les Préliminaires (50—56), mais elle exige ici quelques developpemens qui vont nous conduire à des règles générales.

Lorsqu'une surface fait partie des données ou des résultats d'une épure, ou lorsqu'elle en est l'objet le plus marquant, on doit la considérer comme existant réellement dans l'espace (56); or, d'après cela, les diverses parties de cette surface deviennent susceptibles de se cacher les unes les autres, et les lignes qui servent à la représenter, et qui doivent être pleines ou ponctuées selon qu'elles sont vues ou cachées, se trouvent, quant à leur mise au trait, tout-à-fait subordonnées à la manière dont la surface est vue, c'est-à-dire, à son effet sur l'œil, en sorte que cet effet est souvent rendu par l'exécution des lignes des épures.

158. Il suit de là que la détermination des parties vues et cachées d'une surface est un problème important de la Géométrie descriptive. Pour indiquer le moyen de le résoudre, soit MNP un plan quelconque de projection, S*mnpq*R une surface quelconque située au-dessus de ce plan, et *m'n'p'q'* le contour de la projection de cette surface. Il est clair qu'il y aura sur S*mnpq*R, une ligne *mnpq*, dont la projection sera le contour donné *m'n'p'q'*; or, cette ligne partagera évidemment la surface en deux parties, l'une S*mnpq*, vue, parce qu'elle sera située à l'opposé du plan de projection par rapport à *mnpq*; l'autre *mnpq*R, cachée, parce qu'elle sera du côté du plan de projection par rapport à la même ligne *mnpq*. Pl. 9. Fig. 1.

Ce qui précède s'applique aussi bien à toute portion de surface qui serait située au-dessus du plan MNP, qu'à la surface S*mnpq*R; ainsi nous en conclurons que lorsqu'une portion de surface est seule dans l'espace, ou, ce qui revient au même, lorsqu'elle ne peut être cachée par aucune autre portion de surface, elle se trouve divisée par la ligne *mnpq*, qui a pour projection le contour *m'n'p'q'* de la projection de cette surface, en deux parties, l'une vue, parce qu'elle est à l'opposé du plan de projection MNP; l'autre cachée, parce qu'elle est située vers ce plan.

159. On remarquera aussi, qu'en supposant toujours que la portion de surface dont il s'agit soit au-dessus du plan de projection, et soit seule dans l'espace, ou qu'elle ne puisse être cachée par aucune autre portion de surface, le contour *m'n'p'q'* est entièrement vu. Nous ferons par la suite un fréquent usage de cette conséquence et de la précédente.

160. Maintenant, nous allons passer à l'examen et à la représentation

des diverses surfaces qui, par leurs propriétés particulières, par la simplicité de leurs générations, ou par l'usage qu'on en fait dans les arts, offrent de l'intérêt.

Les trois chapitres ci-après vont être consacrés à cet objet. Les surfaces y seront classées par familles, genres, espèces et variétés. Nous rangerons dans une même famille toutes celles qui seront soumises au même mode de génération, et nous diviserons les familles en genres, en espèces et en variétés, selon les diverses particularités qui pourront modifier ce mode.

Dans les livres suivans, nous construirons les intersections de surfaces, les plans tangens, et les tangentes aux intersections de surfaces, d'après la théorie générale exposée plus haut. Il était nécessaire qu'elle fût un peu connue pour passer à l'examen et à la représentation des surfaces qui vont nous occuper.

CHAPITRE II.

Des surfaces cylindriques, coniques, et de révolution.

161. Les trois corps ronds, dont on s'occupe dans les élémens de Géométrie, ont pour surfaces, ainsi qu'on va le voir, des espèces particulières de surfaces cylindriques, coniques, et de révolution; ce qu'on a appris des trois corps ronds facilitera par conséquent l'intelligence de ce que nous allons dire.

162. DES SURFACES CYLINDRIQUES. On appelle *surfaces cylindriques*, ou simplement *cylindres*, les surfaces qui sont engendrées par le mouvement d'une droite qui suit une courbe donnée, et qui, dans toutes ses positions, est parallèle à une même droite.

La droite mobile est la *génératrice*, la courbe qu'elle suit est la *directrice*, et les positions qu'occupe la génératrice sont ce qu'on appelle les *élémens* du cylindre.

Le nom de *surface cylindrique* et celui de *cylindre* s'emploient indifféremment; cependant, la dénomination de cylindre se donne plus particulièrement quand on suppose la surface limitée et qu'on la considère sous

le rapport de son étendue ou sous celui du volume qu'elle renferme, et celle de surface cylindrique, quand on conçoit la surface indéfiniment prolongée et qu'on la considère sous le rapport de sa génération.

Lorsqu'on emploie le nom de cylindre on substitue ordinairement au nom de directrice celui de *base* du cylindre.

163. Cela posé, prenons pour directrice d'une surface cylindrique, la courbe qui se projette horizontalement suivant l'arc de cercle *rstu*, et verticalement, suivant le cercle $r's't'u'v'x'$. Prenons pour génératrice la droite (xX, x'X'), et proposons-nous de représenter cette surface. Pour cela, nous menerons par une suite de points (r, r'), (s, s'), (t, t'), etc., de la directrice ($rstu$, $r's't'u'v'x'$), les droites (rR, r'R'), (sS, s'S'), (tT, t'T'), etc., parallèles à (xX, x'X'); ces droites seront des élémens de la surface dont il s'agit, c'est-à-dire des positions de la génératrice, et ils serviront à indiquer la forme et la direction de cette surface. Pl. 10. Fig. 1.

164. Connaissant ces élémens, on construira les points (R, R'), (S, S'), (T, T'), etc., où ils percent le plan horizontal; par ces points on menera la ligne RSTUVX, et cette ligne sera évidemment la trace du cylindre donné. Cette trace aidera non seulement à dessiner le cylindre, mais comme elle sera elle-même sa propre représentation, et qu'en conséquence il sera plus facile de se la figurer que toute autre ligne de ce cylindre, elle offrira généralement cet avantage, qu'en la prenant pour directrice, on aura la génération la plus propre à donner l'idée du cylindre.

Il serait aisé de construire au moyen des élémens (rR, r'R'), (sS, s'S'), (tT, t'T'), etc., la trace verticale du cylindre donné; mais comme elle est sur la partie inférieure du plan vertical, il en résulte qu'elle n'est pas vue, et qu'elle compliquerait assez inutilement la représentation.

On voit, planche 16, un cylindre dont les traces, horizontale et verticale, sont entièrement situées sur les parties antérieure et supérieure des plans de projection. Elles contribuent beaucoup dans ce cas à dessiner le cylindre, et elles doivent par conséquent faire partie de sa représentation.

165. Cherchons maintenant les contours de la surface donnée. Pour cela, menons au cercle $r's't'u'v'x'$, les tangentes rr', uu', perpendiculaires à la ligne de terre; elles détermineront sur la directrice donnée les points (r, r'), (u, u'). Par les projections horizontales r et u de ces points, imaginons les droites rR, uU, parallèles à xX; je dis que ces droites composeront en projection horizontale le contour du cylindre donné. En effet, elles comprennent la projection horizontale *rstu* de la directrice; or, il n'y

Pl. 10. Fig. 1. a pas de point v de $rstu$, par lequel on ne puisse mener la projection horizontale vV d'un élément indéfini du cylindre; donc il n'y a pas de point compris entre les droites rR et uU, qui ne soit la projection horizontale d'un point du cylindre en question (*). De plus, il est clair que ce cylindre n'a pas de points au dehors des plans verticaux qui passent par les droites rR, uU; donc ces droites forment sur le plan horizontal le contour demandé.

Pour avoir le contour analogue sur le plan vertical, on remarquera qu'il n'y a pas de point de la ligne $r's't'u'v'x'$, par lequel on ne puisse mener la projection verticale d'un élément du cylindre, et l'on en conclura que les droites s'S', v'V', qui sont parallèles à x'X', et qui comprennent la courbe $r's't'u'v'x'$, enferment les projections verticales de tous les points de ce cylindre, et sont par conséquent le contour demandé.

Ces contours rR, uU, s'S', v'V', étant les projections d'élémens (rR, r'R'), (uU, u'U'), (sS, s'S'), (vV, v'V'), qui ont, par rapport aux plans de projection, une position remarquable, il convient de préférer ces élémens à tous les autres, quand il s'agit de représenter une surface cylindrique.

166. On doit conclure de ce qui précède que pour représenter une surface cylindrique, il faut, premièrement, représenter la directrice et un nombre suffisant de positions de la génératrice; secondement, construire ses traces sur les parties antérieure du plan horizontal et supérieure du plan vertical; troisièmement enfin, représenter les élémens qui, en projection horizontale ou en projection verticale, forment les contours des projections de cette surface.

167. Comme un cylindre est déterminé par sa directrice et sa génératrice, nous le désignerons ordinairement par les noms de ces deux lignes, renfermés dans une accolade. Ainsi, la surface cylindrique {($rstu$, $r's't'u'v'x'$), (xX, x'X')} sera celle dont nous nous sommes occupés.

Lorsqu'un cylindre aura pour génératrice une droite perpendiculaire à l'un des plans de projection, il ne rencontrera qu'un de ces plans, et nous nous contenterons, pour le désigner, de nommer sa trace sur ce plan.

168. Il est clair que les surfaces projetantes d'une ligne courbe quelconque ($rstu$, $r's't'u'v'x'$), sont des surfaces cylindriques, dont les génératrices sont respectivement perpendiculaires aux deux plans de projection. D'après cela,

(*) On pourrait dire de deux points, car toute verticale qui a son pied entre rR et uU, rencontre évidemment le cylindre en deux points.

on dira, en se conformant à la notation que l'on vient d'exposer, que la courbe (*rstu*, $r's't'u'v'x'$), est l'intersection des deux cylindres *rstu*, $r's't'u'v'x'$. Pl. 10. Fig. 1.

169. Les cylindres, comme le dernier que nous venons de nommer, dont les bases sont des cercles, s'appellent *cylindres à bases circulaires*. Lorsque la base est une ellipse, une hyperbole ou une parabole, le cylindre prend le nom de *cylindre à base elliptique*, *hyperbolique* ou *parabolique*.

Ces différentes espèces de cylindres reçoivent la dénomination générique de *cylindres du second degré* (*).

On verra plus loin (606) que les cylindres à bases elliptiques sont tous des cylindres à bases circulaires.

Nous réservons pour un autre endroit (208) ce qu'on pourrait dire ici des *cylindres droits*, qui sont une variété de cylindres à bases elliptiques.

170. *Exécution de la fig*. 1re, *pl*. 10. Commençons par ce qui est relatif au plan horizontal.

D'après ce qu'on a vu précédemment (159), les lignes *r*R, *u*U, qui forment le contour de la projection horizontale du cylindre, devront être vues, tant qu'elles seront situées au-dessus du plan horizontal : or, les traces horizontales de ces droites sont les points (R, R'), (U, U'); donc les projections *r*R, *u*U, des mêmes droites, doivent être marquées pleines jusqu'aux points R et U. Si on les prolongeait au-delà, elles devraient être ponctuées.

171. La projection horizontale *rstu* de la directrice, comprise entre les contours vus *r*R, *u*U, est aussi nécessairement vue. En effet, chaque point de *rstu*, est la projection de deux points de cette directrice, l'un (t, t') situé sur l'arc supérieur (*rstu*, $r's't'u'$), l'autre (t, t'') situé sur l'arc inférieur (*rstu*, $r'x'v'u'$); or, de ces deux points, celui (t, t') qui appartient à l'arc supérieur, est, par rapport au plan horizontal, sur le dessus de la surface;

(*) Ce nom appartient à l'Analyse appliquée plutôt qu'à la Géométrie; il vient de ce que l'équation de ces cylindres est du second degré. Les équations de l'ellipse, de l'hyperbole et de la parabole, étant aussi du second degré, on appelle ces lignes des *courbes du second degré*.

En général, le degré de l'équation d'une courbe ou d'une surface est le même que le nombre de points suivant lesquels cette courbe ou cette surface peut être rencontrée par une droite. La ligne droite est par conséquent la seule ligne, et le plan la seule surface, qui soient du premier degré.

Les dénominations de lignes et surfaces du premier et du second degré équivalent à celles de lignes et surfaces du premier et du second *ordre*.

Pl. 10. Fig. 1. donc il est vu en projection horizontale : donc il n'y a pas de point de *rstu* qui ne soit la projection d'un point vu de la directrice. La ligne *rstu* doit en conséquence être pleine (56).

Puisque chaque point *t* de *rstu* correspond à deux points (t, t'), (t, t'') de la directrice, le plus élevé (t, t') cache évidemment l'autre; d'où il suit que tous les élémens qui passent par des points de l'arc $(rstu, r's't'u')$, sont vus en projection horizontale; et que tous ceux qui passent par des points de l'arc $(rstu, r'x'v'u')$, ne le sont pas. Donc les élémens $(sS, s'S')$, $(tT, t'T')$, qui passent par les points (s, s'), (t, t'), de la directrice, ont leurs projections sS, tT, vues, et par conséquent pleines; tandis que ceux $(vV, v'V')$, $(xX, x'X')$, qui passent par les points (v, v'), (x, x'), de la même directrice, ont leurs projections vV, xX, cachées, et par conséquent ponctuées.

172. Il suit de là que depuis l'élément $(rR, r'R')$, qui passe par le point (r, r'), jusqu'à l'élément $(uU, u'U')$, qui passe par le point (u, u'), tous les élémens de la partie supérieure du cylindre sont vus; et, qu'entre les mêmes élémens, ceux de la partie inférieure ne sont pas vus. Ce résultat était déjà connu, car les élémens $(rR, r'R')$, $(uU, u'U')$, ayant pour projections les contours rR, uU, du cylindre, ces élémens partagent ce cylindre en deux portions; l'une supérieure, dont tous les élémens sont vus; l'autre inférieure, dont les élémens sont cachés (158).

Toutefois, comme les élémens vus ne sont pas entièrement au-dessus du plan horizontal, il est clair qu'ils cessent d'être vus à l'endroit où ils traversent la trace RSTU, et qu'au-delà de cette trace ils doivent être ponctués.

173. Quant à la trace RSTUVX, il est évident qu'elle se compose de deux parties; l'une RXVU, suivant laquelle les élémens cachés du cylindre percent le plan horizontal; l'autre RSTU, suivant laquelle le même plan est percé par les élémens vus. Or, il est évident que les élémens cachés percent le plan horizontal suivant les points d'une trace cachée, et que les élémens vus le percent suivant les points d'une trace vue; donc, l'arc RSTU doit être marqué par une ligne pleine, et l'arc UVXR par une ligne ponctuée.

174. Passons maintenant à la détermination des lignes pleines et ponctuées de la projection verticale.

On remarquera d'abord, que toute la partie du cylindre située au-dessus du plan horizontal est en avant du plan vertical, et que les contours $s'S'$, $v'V'$, de cette partie de cylindre, sont par conséquent vus (159).

On remarquera ensuite que les élémens $(sS, s'S')$, $(vV, v'V')$, étant ceux

qui ont pour projections verticales les contours $s'S'$, $v'V'$, ces élémens di- Pl. 10.
visent la surface cylindrique en deux parties, l'une vue, l'autre cachée (158); Fig. 1.
que la partie vue est nécessairement la partie antérieure correspondante à la portion ($srxv$, $s'r'x'v'$) de la directrice, et que la partie cachée est celle qui correspond à la portion ($stuv$, $s't'u'v'$) de la même directrice.

Cela posé, si l'on fait attention que les élémens (rR, $r'R'$), (xX, $x'X'$), passent par les points (r, r'), (x, x') de l'arc ($srxv$, $s'r'x'v'$) de la directrice, on verra qu'ils sont sur la partie antérieure de la surface cylindrique, et l'on en conclura que leurs projections verticales $r'R'$, $x'X'$, doivent être pleines. Les élémens (tT, $t'T'$), (uU, $u'U'$), au contraire, sont sur la partie postérieure; car ils passent par des points (t, t'), (u, u'), de l'arc ($stuv$, $s't'u'v'$); donc ils ne sont pas vus : donc leurs projections $t'T'$, $u'U'$, doivent être ponctuées.

Enfin, la projection $r's't'u'v'x'$, de la directrice, sera composée de deux arcs; l'un $s'r'x'v'$, correspondant à la partie antérieure du cylindre, sera vu et marqué par une ligne pleine; l'autre $s't'u'v'$, correspondant à la partie postérieure, sera caché, et devra par conséquent être ponctué.

175. Il serait assez convenable de représenter la surface donnée en la supposant prolongée indéfiniment, et pour cela, il ne s'agirait que de marquer en points, les prolongemens des élémens indiqués, les prolongemens des contours rR, uU, $s'S'$, $v'V'$, et la trace verticale du cylindre; mais, comme les parties d'une surface, sur lesquelles on a besoin d'opérer, sont pour l'ordinaire situées dans l'angle antérieur et supérieur des deux plans de projection, il arrive presque toujours que, pour simplifier les épures, on ne s'occupe que de ces parties. C'est selon cet usage que l'épure est construite.

Passons à l'examen d'une autre famille de surfaces.

176. DES SURFACES CONIQUES. Les surfaces *coniques* sont celles qui sont engendrées par une droite mobile, assujettie à passer constamment par un point fixe, et à suivre dans son mouvement une courbe donnée.

D'après cela, une ligne ($rstuvx$, $s'v'$) et un point (A, A') étant connus; Fig. 2
si l'on imagine, par chaque point de la courbe, une droite indéfinie qui passe par le point (A, A'), l'ensemble de ces droites formera une surface conique.

177. Pour représenter une telle surface, on prendra sur la directrice ($rstuvx$, $s'v'$), une suite de points (r, r'), (s, s'), (t, t'), etc.; par ces points, et par le point (A, A'), on mènera les droites (Ar, $A'r$), (As, $A's'$), (At, $A't'$), etc.; chacune de ces droites sera une position de la génératrice,

Pl. 10. Fig. 2. ou ce que l'on appelle un *élément* de la surface conique, et les divers élémens représentés indiqueront la forme et la position de cette surface.

178. Ces élémens (A*r*, A'*r'*), (A*s*, A'*s'*), (A*t*, A'*t'*), etc., perceront le plan horizontal suivant les points R, S, T, etc.; on construira ces points, et ils serviront à décrire l'intersection RSTUVX, du plan horizontal et de la surface donnée.

Lorsque cette intersection se trouvera, comme dans le cas de la figure, sur la partie antérieure du plan horizontal, elle aidera sensiblemennt à accuser la forme et la position de la surface, et par cette raison elle devra toujours, dans ce cas, être marquée sur la représentation.

La trace verticale s'obtiendra comme la trace horizontale; elle sera en général de la même utilité que cette dernière, et l'on devra l'indiquer sur l'épure, toutes les fois qu'elle se trouvera située sur la partie supérieure du plan vertical.

179. Enfin, pour que la représentation d'une surface conique fasse image, il faudra mener les élémens (A*r*, A'*r'*), (A*u*, A'*u'*), dont les projections horizontales A*r*, A*u*, comprennent la directrice; et ceux (A*s*, A'*s'*), (A*v*, A'*v'*), dont les projections verticales A'*s'* et A'*v'*, comprennent la projection verticale *s'x'* de la même directrice. Ces élémens, comme on le voit à l'inspection de la figure, servent à dessiner les projections de la surface conique; il convient par conséquent de les marquer avec soin.

180. Les surfaces dont nous nous occupons présentent une particularité remarquable : c'est qu'elles sont composées de deux parties distinctes, que sépare le point fixe par lequel passe constamment la droite qui les engendre. On donne le nom de *nappe* (155) à chacune de ces parties; et l'on appelle *centre* le point qui sépare les deux nappes.

181. Une surface conique prend souvent le nom de *cône*, surtout lorsqu'on la considère comme limitée, et qu'on a égard au volume qu'elle renferme : ordinairement on désigne alors la directrice par le nom de *base*, et le centre par le nom de *sommet*.

182. Nous indiquerons toujours une surface conique au moyen des noms de sa directrice et de son centre, écrits entre les branches d'une accolade; ainsi, par exemple, s'il s'agit de celle que représente la figure, nous l'appellerons la surface conique {(A, A'), (*rstuvx*, *s'v'*)}.

183. La directrice (*rstuvx*, *s'v'*), d'un cône, ayant une position déterminée, si l'on conçoit que le sommet (A, A'), qui est le point de concours des élémens du cône, s'éloigne à l'infini; il est clair qu'à mesure que l'éloi-

gnement augmentera, les élémens approcheront de plus en plus d'être parallèles, et que, lorsqu'ils concourront à l'infini, ils formeront une surface cylindrique.

Il suit de là que la famille des surfaces cylindriques est comprise dans celle des surfaces coniques, et que les cylindres à bases circulaires, à bases elliptiques, à bases hyperboliques, etc., ne sont autre chose que des variétés d'espèces de cônes, qui ont pour bases des cercles, des ellipses, des hyperboles, etc.

184. Ces deux familles de surfaces ont entre elles la plus grande analogie, et on leur applique la même nomenclature. Ainsi, les cônes qui ont des cercles pour bases, s'appellent *cônes à bases circulaires;* ceux qui ont pour bases des sections coniques, s'appellent *cônes du second degré* (169 note); et ces derniers se divisent en *cônes elliptiques, cônes hyperboliques* et *cônes paraboliques*, selon qu'on les considère comme ayant des ellipses, des hyperboles ou des paraboles pour bases (*).

185. On doit conclure de ce qui a été dit plus haut que, pour représenter un cône quelconque, il faut premièrement, représenter sa directrice; secondement, son sommet; troisièmement, un nombre suffisant de positions de sa génératrice; quatrièmement, les traces de ce cône sur les parties antérieure du plan horizontal et supérieure du plan vertical; cinquièmement enfin, les élémens qui, en projection horizontale ou en projection verticale, forment les contours des projections du cône.

Mais pour que la représentation d'une surface conique fasse tout l'effet dont elle est susceptible, il faut encore que les règles convenues sur l'exécution des lignes (56) soient parfaitement observées. Pour éclaircir cet objet, nous allons déterminer les parties vues et cachées de la directrice; nous nous occuperons ensuite successivement des parties vues et cachées des contours, des élémens et des traces.

186. *Exécution de la fig.* 2, *pl.* 10. La directrice (*rstuvx*, *s'v'*), est composée de deux arcs, l'un (*srxv*, *s'v'*), antérieur par rapport au plan vertical; l'autre (*stuv*, *s'v'*), postérieur par rapport au même plan. Or, de ces deux arcs, le premier (*srxv*, *s'v'*), a sa projection verticale *s'v'* vue; car il n'y a rien, en-deçà des points qui le forment, qui puisse cacher ces points: la ligne *s'v'* est en conséquence pleine. Pl. 10. Fig. 2.

Le second arc (*stuv*, *s'v'*) est caché par le premier; il devrait par cette

(*) On démontrera (605) que tous ces cônes sont des cônes à bases circulaires.

Pl. 10. Fig. 2. raison avoir sa projection $s'v'$ ponctuée : mais comme cette projection est la même que celle de l'arc ($srxv$, $s'v'$), et que des points ne peuvent pas paraître sur un trait plein, on se trouve dans l'impossibilité d'exprimer sur l'épure que l'arc ($stuv$, $s'v'$) n'est pas vu en projection verticale.

Par rapport au plan horizontal, les contours rR, uU, divisent la directrice en deux arcs, l'un ($rstu$, $r's't'u'$), qui est évidemment vu, comme étant sur le dessus du cône; l'autre ($uvxr$, $u'v'x'r'$), nécessairement caché, comme étant sur le dessous. Donc l'arc $rstu$ doit être indiqué par un trait plein, et l'arc $uvxr$ par un trait ponctué,

187. Quant aux contours AR, AU, A'V', A'S', ils sont les projections des élémens (AR, A'R'), (AU, A'U'), (AV, A'V'), (AS, A'S'), et ils doivent être pleins, dans la figure prise pour exemple, à partir des points (R, R'), (U, U'), (V, V'), (S, S'), où ces élémens passent au-dessous du plan horizontal.

188. D'après ce qu'on a vu précédemment (158), ces mêmes élémens (AR, A'R'), (AU, A'U'), (AV, A'V'), (AS, A'S'), divisent le cône en parties vues et en parties cachées. Ne considérons d'abord, sur la surface conique, que la nappe qui contient la directrice; on pourra aisément se convaincre, 1°. qu'en projection horizontale, la portion de surface qui correspond à l'arc vu ($rstu$, $r's't'u'$) de la directrice, est vue, et que par conséquent les projections horizontales AS, AT, des élémens (AS, A'S'), (AT, A'T'), qui passent par des points (s, s'), (t, t'), de ($rstu$, $r's't'u'$), sont vues; 2°. qu'en projection verticale, la portion de surface qui correspond à l'arc vu ($vxrs$, $v'x'r's'$) de la directrice, est vue, et que par conséquent les projections A'X', A'R', des élémens (AX, A'X'), (AR, A'R'), qui passent par les points (x, x'), (r, r'), de l'arc ($vxrs$, $v'x'r's'$), sont vues; 3°. qu'en projection horizontale, la portion de surface qui correspond à l'arc caché ($uvxr$, $u'v'x'r'$) de la directrice, est cachée; et que les élémens (AV, A'V'), (AX, A'X'), qui sont sur cette portion de surface, et qui passent par conséquent par des points (v, v'), (x, x'), de l'arc ($uvxr$, $u'v'x'r'$), ont leurs projections horizontales AV, AX, cachées; 4°. enfin, qu'en projection verticale, la portion de surface qui correspond à l'arc ($stuv$, $s't'u'v'$) de la directrice, est cachée; et que les élémens (AU, A'U'), (AT, A'T'), qui passent par des points de cet arc, ont par conséquent leurs projections verticales A'U', A'T', cachées.

189. Nous pouvons conclure de là cette règle générale : c'est qu'ayant distingué sur une projection la partie vue de la directrice d'un cône de sa

partie cachée, les élémens qui passent par des points vus de cette directrice seront vus sur la même projection, et ceux qui passent par des points cachés de la même directrice, aussi sur la même projection, seront cachés. Cela suppose bien entendu que les élémens et la directrice que l'on considère sont sur la même nappe du cône, et il est d'ailleurs évident que ces élémens ne peuvent jamais être vus qu'au-dessus et en-deçà des deux plans de projection.

190. Sachant reconnaître qu'un élément de la nappe qui contient la directrice est vu ou n'est pas vu, il est facile de savoir s'il est vu ou caché sur l'autre nappe; car il est évident que tout élément situé sur la partie vue d'une nappe, est sur la partie cachée de l'autre nappe : donc on doit ponctuer sur une nappe tout élément plein sur l'autre. C'est en suivant cette règle que l'on a dessiné les deux projections de la nappe supérieure du cône pris pour exemple.

191. Il ne nous reste plus à déterminer que les parties vues et cachées des traces d'un cône; or, il est évident que les élémens de ce même cône, s'ils sont vus, perceront les plans de projection suivant des points vus, et que, s'ils sont cachés, ils perceront les mêmes plans suivant des points cachés. Il suit de là que l'on doit marquer par une ligne pleine l'arc RSTU Pl. 10.
de la trace RSTUVX, parce qu'elle correspond à des élémens (AS, A'S'), Fig. 2.
(AT, A'T'), dont les projections horizontales sont vues; et que l'on doit indiquer en points l'arc UVXR de la même trace, parce qu'elle correspond en projection horizontale à des élémens cachés (AV, A'V'), (AX, A'X').

192. DES SURFACES DE RÉVOLUTION. Imaginons une ligne droite Pl. 9.
(AB, A'B'), située comme on voudra dans l'espace, et concevons qu'une Fig. 6.
courbe donnée (CD, C'D'), tourne autour de cette droite, de manière que chaque point de la courbe (CD, C'D'), décrive un cercle dont le centre soit sur (AB, A'B'), et dont le plan soit perpendiculaire à cette droite. La courbe (CD, C'D') décrira dans son mouvement une surface particulière qui aura la droite (AB, A'B') pour directrice, la courbe (CD, C'D') pour génératrice, et qui sera ce qu'on appelle une *surface de révolution.*

On donne à la droite directrice (AB, A'B'), le nom d'*axe de révolution.*

On peut dire, d'après cela, que *les surfaces de révolution sont des surfaces telles, qu'en les coupant par des plans perpendiculaires à l'axe de révolution, les sections sont des cercles dont les centres sont distribués sur cet axe.*

Pl. 9. Fig. 6. 193. Pour représenter une surface de révolution, il faudra décrire un certain nombre de positions de sa génératrice; or, supposons qu'on demande celle que la courbe (CD, C'D') occupait, lorsque les arcs décrits par ses différens points étaient de *n* degrés. Pour obtenir cette position, on abaissera de plusieurs points (M, M'), (N, N'), etc., de (CD, C'D'), des perpendiculaires à l'axe (AB, A'B'); on déterminera les pieds de ces perpendiculaires; on construira les distances de chaque point (M, M') (N, N'), etc., aux pieds correspondans, et ces distances seront les rayons des cercles décrits par les points (M, M'), (N, N'), etc. Par les points obtenus on élevera, perpendiculairement à l'axe, des droites qui fassent avec les rayons dont les longueurs auront été construites, l'angle de *n* degrés (*); on portera ensuite sur ces perpendiculaires, à partir de (AB, A'B'), les longueurs des rayons correspondans (**), et les extrémités des longueurs portées seront des points de la position cherchée de la génératrice : en menant donc une ligne par ces points, on aura cette position.

Avec un axe (AB, A'B'), dont les projections se trouvent placées d'une manière quelconque par rapport à la ligne de terre, ces constructions seraient d'une pratique très pénible : la simplification des données va obvier à cet inconvénient.

194. On choisit ordinairement les plans de projection de manière que l'axe de révolution soit perpendiculaire au plan horizontal, alors il se Pl. 11. trouve projeté sur ce plan suivant un point O, et verticalement suivant une droite O'O'' perpendiculaire à la ligne de terre; ce qui, ainsi qu'on va le voir, rend toutes les opérations fort simples.

Soit (ABCDE, A'B'C'D'E'), la génératrice d'une surface de révolution dont (O, O'O'') soit l'axe; à chaque point (A, A'), (B, B'), (C, C'), etc., de (ABCDE, A'B'C'D'E'), il correspondra un cercle (AVA''Q, V'Q'), (BXB''R, X'R'), (CYC''S, Y'S'), etc., et l'ensemble de ces cercles composera la surface décrite par la génératrice (ABCDE, A'B'C'D'E'). Si l'on veut avoir une position de cette génératrice, celle qu'elle occupait, par exemple,

---

Pl. 9. Fig. 6 (*) Ce problème d'élever par un point de l'axe (AB, A'B'), et perpendiculairement à cet axe, une droite qui fasse un angle donné avec une perpendiculaire au même axe, connue et passant par le même point, sera facile à résoudre, et pourra servir à exercer les commençans.

(**) Ceux qui résoudront le problème de la note précédente, pourront aussi s'exercer sur ce second problème : *Porter sur une ligne droite donnée, à partir d'un point donné, une droite d'une longueur connue.*

lorsque l'arc parcouru par chacun de ses points était de *n* degrés, Pl. 11.
il ne s'agira que de prendre sur les cercles horizontaux (AKFV, A'V'), (BLGX, B'X'), (CMHY, C'Y'), etc., des arcs (AKF, A'F'), (BLG, B'G'), (CMH, C'H'), etc., de *n* degrés chacun, et les extrémités (F, F'), (G, G'), (H, H'), etc., de ces arcs, détermineront la position cherchée (FGHIJ, F'G'H'I'J').

195. On pourra déterminer ainsi autant de positions de la génératrice qu'on en voudra, et l'ensemble de ces positions représentera la surface en question. On peut voir sur la figure 1re, pl. 12, l'effet de la représentation. Pl. 12. Fig. 1.
La génératrice est sur cette figure, comme sur la pl. 11, une hélice à base circulaire (110); on a représenté cette hélice dans douze de ses positions; chaque position a pour projection horizontale un cercle, pour projection verticale une sinusoïde, et la disposition de ces lignes sur le dessin fait parfaitement sentir la forme de la surface.

Pour rendre la représentation plus intelligible, on a marqué, sur les plans de projection, les contours *uvxyzo*, *rst*, *abcdef*, *a'b'c'd'f'*, de cette surface; on voit clairement que la seule condition d'enfermer toutes les projections de la génératrice, les détermine complètement, et qu'elle fournit le moyen de les décrire (154).

196. Mais, comme il est difficile de mener avec exactitude des lignes *uvxyzo*, *abcdef*, définies par la seule condition d'être tangentes à plusieurs autres lignes, il est bon d'avoir un moyen de déterminer plus rigoureusement les contours des projections d'une surface de révolution.

Pour la projection horizontale, on remarquera que ces contours sont toujours circulaires. En effet, chaque point de la ligne (ABC..., A'B'C'...), Pl. 11.
décrivant un cercle lorsque cette ligne engendre la surface, il est clair que les cercles AKFVA''Q, EPJW*e*U, qui répondent aux points (A, A'), (E, E'), les plus rapprochés ou les plus éloignés de l'axe, enferment les projections de tous les autres cercles; donc ils sont les contours en question.

Pour la projection verticale, voici comment ils s'obtiendront. On prendra sur la génératrice plusieurs points (A, A'), (B, B'), (C, C'), etc.; on mènera par leurs projections horizontales A, B, C, etc., les cercles AVA''Q, BXB''R, CYC''S, etc., et par leurs projections verticales A', B', C', etc., les droites V'Q', X'R', Y'S', etc., parallèles à la ligne de terre *mn*. Cela fait, à chacun de ces cercles on mènera les tangentes VV' et QQ', XX' et RR', YY' et SS', etc., perpendiculaires à *mn*. Ces tangentes couperont les droites correspondantes V'Q', X'R', Y'S', etc., suivant des points V', X',

Pl. 11. Y′, etc., Q′, R′, S′, etc., et ces points détermineront évidemment deux courbes V′X′Y′Z′W′, Q′R′S′T′U′, symétriques par rapport à O′O″, et formant les contours cherchés.

197. Il est évident que les cercles qui ont en O leur centre commun sont touchés par des droites perpendiculaires à la ligne de terre suivant des points de contact V, X, Y..., Q, R, S, etc., situés sur une même droite WU parallèle à *mn*. Or, les points V, X, Y..., Q, R, S, etc., sont les projections d'une suite de points (V, V′), (X, X′), (Y, Y′)..., (Q, Q′), (R, R′), (S, S′), etc., qui se projettent verticalement en V′, X′, Y′..., Q′, R′, S′, etc., c'est-à-dire sur le contour V′X′Y′Z′W′, Q′R′S′T′U′; donc la ligne de la surface qui a ce contour pour projection verticale se projette horizontalement suivant WU : donc cette ligne est dans le plan WU, mené par l'axe de révolution parallèlement au plan vertical.

Et comme le contour V′X′Y′Z′W′, Q′R′S′T′U′, est composé de deux parties symétriques par rapport à O′O″, il s'ensuit que la ligne qui se projette suivant le contour de la projection verticale, ou, ce qui revient au même, la section de la surface avec le plan WU, est composée de deux branches (VW, V′X′Y′Z′W′), (QU, Q′R′S′T′U′), symétriques par rapport à l'axe (O, O′O″).

Nous ferons remarquer que si l'on fait tourner cette section UW, autour de l'axe de révolution, chacun de ses points (V,V′) ou (Q,Q′), (X,X′) ou (R,R′), (Y,Y′) ou (S,S′), etc., décrira le cercle engendré par le point correspondant de la ligne donnée (ABC..., A′B′C′...); ainsi, la section WU produira dans son mouvement la surface dont nous nous occupons.

198. On peut donc considérer cette section comme une nouvelle génératrice de la surface donnée; et comme toutes ses positions sont comprises dans des plans verticaux, dont les points se projettent horizontalement sur des droites passant par le point O, nous en conclurons que les sections faites sur une surface de révolution, par les plans qu'on peut mener par son axe, sont toutes égales entre elles.

On donne à ces sections le nom de *méridiens* ou celui de *méridiennes*. On affecte plus particulièrement le premier aux plans des sections, et le dernier aux lignes d'intersection des plans et de la surface; mais souvent on les confond tout-à-fait.

199. Si l'on imagine qu'une des deux branches (WV, W′V′), (QU, Q′U′), de la méridienne WU, la première, par exemple, se meuve autour de l'axe (O, O′O″); il est clair qu'après une demi-révolution, elle coïncidera

avec la dernière branche ; qu'après une révolution entière, elle sera dans sa position primitive, et qu'elle aura engendré à elle seule, la même surface que si les deux branches se fussent mues à la fois d'une demi-révolution, ou que si la génératrice donnée (ABC,... A'B'C'...), se fût mue d'une révolution entière. Pl. 11.

Il suit de là qu'une des deux branches de la méridienne suffit pour engendrer une surface de révolution, et que la seconde est surabondante. C'est par cette raison qu'on donne souvent à une branche, considérée isolément, le même nom de méridien ou de méridienne, qui appartient à l'ensemble des deux branches.

200. La construction d'une méridienne quelconque est extrêmement aisée. En effet, supposons qu'on demande celle que contient le plan médien OP : on remarquera que ce plan coupe les cercles (AVQ, V'Q'), (BXR, X'R'), (CYS, Y'S'), etc., suivant des points qui se projettent horizontalement en K, L, M, etc.; on construira les projections verticales K', L', M', etc., de ces points; on décrira la courbe K'L'M'N'P', et l'on aura la méridienne cherchée (KP, K'L'M'N'P').

201. Nous donnerons au plan WU, qui passe par l'axe de révolution, et qui est parallèle au plan vertical, le nom de *plan méridien principal*, ou simplement celui de *méridien principal*. La méridienne qu'il contient, et qui a pour projection verticale le contour de la surface, recevra ordinairement le même nom de *méridien principal*, ou celui de *méridienne principale*.

202. Il résulte de ce qui précède qu'une surface quelconque de révolution est susceptible de trois générations remarquables.

Premièrement, elle peut être engendrée par le mouvement d'une courbe (ABC..., A'B'C'...), donnée dans l'espace, ou déterminée comme on voudra sur la surface, et assujettie à tourner circulairement autour de l'axe (O, O'O").

Secondement, par le mouvement circulaire, autour du même axe, d'une méridienne (KLMNP, K'L'M'N'P').

Troisièmement, par le mouvement d'un cercle horizontal dont le centre suivrait l'axe (O,O'O"), et dont le rayon varierait de manière que la circonférence s'appuyât toujours sur une méridienne (WV, W'V'), ou sur la courbe donnée (ABC..., A'B'C'...).

On remarquera qu'il y a dans cette dernière génération deux directrices, la droite (O, O'O") d'une part, et d'autre part la méridienne (WV, W'V'),

Pl. 11. ou la courbe (ABC..., A'B'C'...); et que la génératrice est une ligne variable de grandeur.

Pl. 12. Fig. 1, 2 et 3. 203. Il correspond à ces trois sortes de générations, trois systèmes de représentation dessinés sur la planche 12. La figure 1, comme nous l'avons déjà vu, est faite dans la supposition que la génératrice soit une hélice donnée. La figure 2 représente la surface, en la supposant produite par le mouvement de la méridienne. Enfin, la figure 3 est la représentation dans laquelle on prend le cercle horizontal, variable de rayon, pour ligne génératrice, l'axe de révolution pour directrice du centre de ce cercle, et la méridienne principale pour directrice de sa circonférence.

Chacune de ces représentations est formée par les projections d'un certain nombre de positions de la génératrice et par les contours des projections de la surface.

La disposition des données est telle, que les traces de cette surface ne peuvent rien ajouter à ses représentations; car elle n'a pas de trace verticale, et sa trace horizontale est déjà marquée comme contour.

Pl. 12. Fig. 2. Sur la figure 2, on a eu soin d'indiquer les projections verticales M″O″, *m'o'*, des lignes (MNOP, M″O″), (*mnop*, *m'o'*), qui se projettent horizontalement suivant les contours MNOP, *mnop*.

204. Nous emploierons communément le système de représentation de la figure 2, parce qu'une surface de révolution est presque toujours donnée au moyen de sa méridienne; mais nous nous dispenserons, pour l'ordinaire, de représenter aucune autre méridienne que la méridienne principale. Cette convention, en réduisant le dessin aux contours des projections de la surface, économisera souvent beaucoup de travail.

Pl. 11. 205. Lorsque la génératrice sera une courbe à double courbure, il nous arrivera, comme dans la planche 11, de représenter des méridiennes, des cercles et des positions de la génératrice. Toutes ces lignes concourent au même but, qui est de donner l'idée de la surface.

Si la ligne de terre *mn* est rencontrée par les projections horizontales EW*e*U, DZ*k*T, etc., du cercle générateur, on en conclura qu'il existe une trace verticale; on déterminera les points (*e*, *e'*), *f*, *h*, *i*, etc., où les cercles (EW*e*U, W'U'), (DZ*k*T, Z'T'), etc., perceront le plan vertical; par ces points on mènera une ligne *e'fghi*, et cette ligne sera la trace verticale de la surface.

206. Pour désigner une surface de révolution, nous indiquerons, entre deux accolades, son axe et sa génératrice; ainsi, par exemple, nous appelle-

rons celle que produit l'hélice (ABC..., A'B'C'...), la surface de révolution Pl. 11.
{(O, O'O''), (ABC..., A'B'C'...)}.

207. Quelquefois la famille des surfaces de révolution rentre dans les deux familles de surfaces précédemment examinées; nous allons exposer dans quels cas, et faire connaître les genres et les espèces de surfaces de révolution qui présentent de l'intérêt.

Lorsque la méridienne d'une de ces surfaces est une droite, cette surface devient un cône ou un cylindre. En effet, toutes les méridiennes étant placées de la même manière par rapport à l'axe, il arrivera que si elles rencontrent cet axe, elles le rencontreront en un même point: alors elles formeront un cône; et si elles ne les rencontrent pas, elles lui seront toutes parallèles, et formeront un cylindre.

Et comme il n'y a pas de point de la méridienne auquel il ne corresponde, sur la surface, un cercle dont le centre soit sur l'axe, et dont le plan soit perpendiculaire à cet axe, il s'ensuit que les cônes et les cylindres de révolution sont des cônes et des cylindres à bases circulaires.

208. On remarquera que ces cylindres ont leurs élémens perpendiculaires au plan du cercle qui leur sert de base. On les nomme, par cette raison, *cylindres droits;* et soit qu'on les considère comme des surfaces de révolution, ou comme des surfaces cylindriques, on donne toujours le nom d'*axe* à la droite élevée par le centre de la base, perpendiculairement au plan de cette base, c'est-à-dire parallèlement aux élémens de la surface.

Dans un cône de révolution, la droite menée par le sommet et par le centre de la base, n'est autre chose que l'axe de révolution. On donne à cette droite le nom d'*axe du cône;* et comme elle est perpendiculaire au plan de la base, il s'ensuit que la surface est symétrique par rapport à cet axe, en sorte que le cône s'élève verticalement lorsqu'il a pour base un cercle horizontal. On appelle, par cette raison, *cônes droits*, les cônes de révolution.

209. Les cônes droits, les cylindres droits, et toutes les surfaces de révolution engendrées par des ellipses, des hyperboles ou des paraboles, en mouvement autour d'un de leurs axes principaux, forment un genre de surfaces de révolution qu'on appelle *surfaces de révolution du second degré* (169 note).

Les espèces que comprend ce genre, sont : les *ellipsoïdes de révolution*, ou les surfaces engendrées par une ellipse, mobile autour de son grand axe ou autour de son petit axe; les *hyperboloïdes de révolution à une nappe*, ou les surfaces engendrées par une hyperbole mobile autour de son axe imagi-

naire; les *hyperboloïdes de révolution à deux nappes*, qui sont ceux où l'hyperbole génératrice tourne autour de son axe réel; les *paraboloïdes de révolution*, ou les surfaces engendrées par une parabole mobile autour de son axe; les cônes droits, et enfin les cylindres droits.

210. Parmi les ellipsoïdes, il y a une variété que nous connaissons : c'est la sphère. Quelque diamètre, d'un quelconque de ses grands cercles, que l'on prenne pour axe, ce grand cercle la produit en tournant sur cet axe; en sorte qu'elle est de révolution par rapport à tous les axes qui se croisent par son centre, ou bien qu'elle est circulaire en tous sens. On emploie très fréquemment cette surface, et on la représente tout simplement au moyen
Pl. 9. des cercles MNP, QRS, qui forment les contours de ses deux projections.
Fig. 7. Si le centre de la sphère était sur la ligne de terre, les mêmes cercles se confondraient en un seul, qui serait tout à la fois la trace horizontale et la trace verticale de la sphère, et qui suffirait pour que l'on exécutât sur cette surface toutes sortes de constructions.

Pl. 11. 211. *Exécution de la planche* 11. Les arcs AB, BC, CD, etc., ayant été pris de même grandeur, les points A', B', C', etc., ont été déterminés de manière que chacun d'eux se trouve au-dessus de celui qui le précède d'une hauteur constante *pq*; donc la génératrice (ABC..., A'B'C'...) est une hélice (110).

Pour que la figure soit peu compliquée, on n'a représenté que l'arc de cette hélice compris entre les points (A, A'), (E, E'); mais, pour indiquer que cet arc ne s'arrête pas à ces points, on a un peu prolongé ses projections en élémens interrompus tels que ceux qu'on emploie pour figurer les lignes de construction.

La surface engendrée par l'arc (ABC..., A'B'C'...) est composée de deux parties, l'une située en avant du plan vertical, et l'autre, dont nous avons fait abstraction, située derrière ce plan. La méridienne (WU, W'V'... Q'U'), montre qu'en projection horizontale, la partie située en avant du plan vertical est entièrement vue. Il suit de là que les cercles (AVA''Q, V'Q'), (BXB''R, X'R'), (CYC''S, Y'S'), etc., qui forment la surface donnée, les positions (ABC..., A'B'C'...), (FGH..., F'G'H'...), de la génératrice, et les méridiennes (QU, Q'U'), (KP, K'P'), (VW, V'W'), doivent avoir leurs projections horizontales marquées en lignes pleines.

212. Par rapport à la projection verticale, le méridien principal WU divise la surface donnée en deux parties; l'une située en avant de ce méridien et nécessairement vue, ainsi que tout ce qu'elle contient; l'autre si-

tuée en arrière du même méridien et cachée par la première. Or, les positions (ABC..., A'B'C'...), (FGH..., F'G'H'...), de la génératrice, et la méridienne (KP, K'P'), sont en avant du méridien WU; donc les projections verticales de ces lignes sont vues. Pl. 11.

Quant aux cercles de la surface, chacun d'eux se trouve composé de deux moitiés qui ont même projection, et dont l'une est vue et l'autre cachée : il s'ensuit qu'elles doivent être indiquées par des lignes pleines V'Q', X'R', etc.

Il nous reste à parler de la trace *e'fghi*; il est évident qu'elle est sur la partie cachée de la surface : donc elle doit être ponctuée.

D'après ce qu'on a vu précédemment (159), il est sans doute surabondant de faire observer que les contours *e*JEU, VAQA'', W'V', U'Q', doivent être formés par des traits pleins.

213. *Exécution de la planche* 12. On voit par la figure 2, que la surface donnée est composée de zones *m'*M''O''*o''*, M''*m'o'*O'', *m'*M'O'*o'*, qui sont toutes cachées par celle qui couronne la portion de surface représentée, et dont chacune est comprise entre deux cercles projetés horizontalement en *mnop* et MNOP. Pl. 12. Fig. 2.

Les demi-révolutions d'hélice, telles que (*rmy*, *r'm'n*), qui forment la zone supérieure dans la figure 1, sont nécessairement vues en projection horizontale, en sorte que chaque cercle *rmyhr*, doit être marqué, dans sa partie *rmy*, par un trait plein. La partie *rhy* du même cercle, répondant à des zones cachées, doit évidemment être ponctuée. Fig. 1.

Pour la projection verticale, on sait que toutes les hélices ou parties d'hélices, qui sont en avant du méridien principal, sont vues (212). D'après cela, les projections verticales des hélices qui s'élèvent des points (x, x'), (y, y'), (z, z'), du plan horizontal, doivent être indiquées en lignes pleines; celles qui s'élèvent des points (k, v'), (u, u'), (v, v'), (w, w'), (i, i'), (o, w'), ayant des arcs en avant du méridien principal et d'autres en arrière, seront composées de lignes pleines et de lignes ponctuées; enfin, celles qui partent des points de l'arc $x''z''$ seront entièrement ponctuées.

Il est facile de voir d'ailleurs que les points où la projection verticale d'une position de la génératrice touche les contours *abcdef*, *f'e'd'c'b'a'*, sépare sur cette projection les arcs pleins des arcs ponctués.

L'exécution des figures 2 et 3 ne présentera aucune difficulté. Fig. 2 et 3.

CHAPITRE III.

Des surfaces gauches.

214. On appelle *surfaces gauches* les surfaces qui sont engendrées par le mouvement d'une droite dont deux positions consécutives ne sont pas en général dans un même plan.

215. Il résulte de cette définition que les surfaces coniques et cylindriques, quoiqu'elles soient produites par le mouvement d'une droite, sont cependant tout-à-fait distinctes des surfaces gauches. En effet, deux élémens consécutifs d'une surface conique, se rencontrent au sommet de cette surface; donc ils sont dans un même plan. Deux élémens consécutifs d'un cylindre sont parallèles; donc ils sont aussi dans un même plan. Donc les surfaces coniques et cylindriques ne peuvent appartenir dans aucun cas à la famille des surfaces gauches.

Cette famille de surfaces est peut-être celle qui présente le plus de genres. Nous nous contenterons d'examiner les plus usuels, et nous allons commencer par celui qui comprend les surfaces les plus simples.

216. DES SURFACES GAUCHES QUI ONT UN PLAN DIRECTEUR. Concevons deux courbes quelconques dans l'espace, et imaginons qu'une droite se meuve, en les touchant constamment, de manière à être toujours parallèle à un plan connu de position, qui sera ce que nous nommons un *plan directeur* (138). Il est évident qu'à moins qu'il n'existe de relations particulières entre le plan directeur et les deux courbes directrices, deux positions consécutives de la génératrice ne seront pas dans un même plan; donc, en général, la surface que décrit une droite qui se meut sur deux courbes données, sans cesser d'être parallèle à un plan, appartient à la famille des surfaces gauches.

Pl. 13. 217. Soit (AB, A'B'), (CD, C'D'), les deux lignes directrices d'une telle surface, et (MO, ON) son plan directeur. Il s'agira d'abord de savoir construire une position quelconque de la génératrice. Supposons qu'on demande celle qui correspond au point (A, A') de la première directrice; il est clair qu'en menant par ce point un plan parallèle au plan

directeur, il coupera la deuxième directrice en un point (C, C'), et que la droite (AC A'C'), Pl. 13.
qui passera par les points (A, A'), (C, C'), sera la position cherchée.

D'après cela, on pourra construire autant d'élémens de la surface qu'on en voudra; mais comme la méthode générale que l'on vient d'indiquer est d'un emploi pénible, il sera bon d'y substituer le procédé suivant.

218. On mènera dans le plan directeur (MO, ON), une droite quelconque (Mn, M'N); on coupera le plan (MO, ON) par des plans verticaux PM, Pa, Pb, etc., menés par un même point P de la trace MO; ces plans couperont la droite (Mn, M'N), en des points (M, M'), (a, a'), (b, b'), etc., et en menant par ces points, et par le point P, les droites (PM, P'M'), Pa, P'a'), (Pb, P'b'), etc., on aura les sections du plan directeur avec les plans verticaux PM, Pa, Pb, etc. Par le point (A, A'), on mènera les droites (Ap, A'p'), (Aq, A'q'), etc., parallèles à ces sections; ces droites formeront un système de lignes parallèles au plan (MO, ON); elles perceront le cylindre vertical CD suivant des points (p, p'), (q, q'), etc., qu'il sera facile de construire, et par les projections p', q', etc. desquels on tracera la ligne $p'q'r's'$. Cette ligne et la ligne CD seront les deux projections d'une courbe, intersection du cylindre vertical CD et des droites menées par le point (A, A'), parallèlement au plan (MO, ON). Or, l'élément cherché fait partie de ces droites; donc il perce le cylindre CD en un point de (CD, $p'q'r's'$). Mais ce point est celui où cet élément coupe la deuxième directrice; donc il est situé sur (CD, C'D'): donc enfin, il a pour projection verticale le point C', intersection de C'D' et de la courbe auxiliaire $p'q'r's'$. Connaissant le point C', on en déduira le point C, et l'élément cherché (AC, A'C') sera déterminé.

En prenant sur (AB, A'B') de nouveaux points comme (A, A'), on déterminera de nouvelles positions de la génératrice, et l'on parviendra bientôt à représenter la surface gauche donnée.

219. Si, au lieu de demander l'élément (AC, A'C'), qui passe par un point donné (A, A') de l'une des directrices, on demandait l'élément (BD, B'D'), qui est parallèle à une droite (Pa, P'a') située dans le plan directeur, les constructions à faire seraient encore plus simples. En effet, il ne s'agirait que de mener par divers points (d, d'), (e, e'), (f, f'), (g, g') etc., de l'une des directrices, des parallèles (dh, $d'h'$), (ei, $e'i'$), etc, à la droite donnée (Pa, P'a'); ces parallèles formeraient un cylindre qui couperait le cylindre vertical CD suivant une courbe ($hijk$, $h'i'j'k'$), facile à déterminer; et comme le cylindre composé des parallèles à (Pa, P'a') contiendrait nécessairement l'élément cherché, il s'ensuit qu'il contiendrait aussi le point de cet élément situé sur (CD, C'D'). Or, ce point ayant sa projection horizontale sur CD, il est à la fois sur le cylindre parallèle à (Pa, P'a'), et sur leur cylindre CD; donc il est sur leur intersection ($hijk$, $h'i'j'k'$); mais il a sa projection verticale sur C'D', donc cette projection est le point D', intersecsion de C'D' et de $h'i'j'k'$.

Ayant le point D', on en déduirait le point D, puis l'élément cherché (BD, B'D').

220. Lorsqu'une des deux directrices (AB, A'B'), (CD, C'D'), d'une des surfaces du genre dont nous nous occupons, est une ligne droite, l'individu qu'elles déterminent appartient à une espèce particulière de surfaces gau-

ches qu'on appelle *conoïdes*, parce que les surfaces qu'elle comprend ont quelque analogie avec les cônes (*).

Si la directrice rectiligne est perpendiculaire au plan directeur, le conoïde prendra le nom de *conoïde droit*, et cette directrice celui de ligne de *striction* (**).

221. Parmi les conoïdes il y a une variété bien remarquable, c'est celle où la droite génératrice, constamment parallèle à un même plan, suit pour directrices deux lignes droites. On donne aux surfaces de cette variété (***) le nom de *paraboloïdes hyperboliques*, ou de *conoïdes du second degré* (169 note).

Pl. 9. Fig. 5. 222. De ce que les élémens d'un paraboloïde hyperbolique sont parallèles à un même plan, il s'ensuit qu'ils divisent les directrices en parties proportionnelles. En effet, soit AC, A'C', les deux directrices d'un paraboloïde hyperbolique; et soit AA', BB', CC', trois de ses élémens. Par le point A, menons AD parallèle à CC'; le plan A'AD sera parallèle aux deux élémens AA', CC': donc il pourra être pris pour le plan directeur du paraboloïde.

Cela posé, abaissons des points B, B', C, C', les perpendiculaires Bb, Cc, B'b', C'c', sur le plan A'AD; on aura Cc = C'c', Bb = B'b'. Menons les droites Abc, A'$b'c'$; elles formeront des triangles semblables qui donneront

$$Cc : Bb :: AC : AB, \text{ et } C'c' : B'b' :: A'C' : A'B'.$$

D'où l'on tirera, à cause de l'égalité des termes des premiers rapports,

$$AC : AB :: A'C' : A'B';$$

et conséquemment,

$$AB : BC :: A'B' : B'C'.$$

223. Réciproquement, si les élémens AA', BB', CC', etc., d'une surface gauche, divisent deux droites directrices A'C, A'C', en parties proportion-

---

(*) Si l'on imagine que le sommet d'un cône soit étendu sur une droite, les élémens qui se croisaient par ce sommet s'appuieront sur cette droite, et, s'ils sont parallèles à un même plan, la surface conique sera un conoïde.

(**) Ce nom vient de ce que la directrice rectiligne renferme les plus courtes distances de tous les élémens, de manière que c'est suivant cette ligne que la surface est le plus resserrée, ou en quelque sorte le plus étranglée.

(***) Ces surfaces ne peuvent être coupées par un plan que suivant une parabole ou suivant une hyperbole; c'est ce qui les a fait nommer paraboloïdes hyperboliques.

nelles, ils seront parallèles à un même plan et appartiendront à un parabo- Pl. 9. Fig. 5.
loïde hyperbolique.

Pour démontrer cette propriété, menons encore AD parallèle à CC′, et abaissons les mêmes perpendiculaires Cc, Bb, C′c', B′b', sur le plan A′AD. On aura, en formant les triangles ACc, A′C′c',

$$AB : AC :: Bb : Cc, \text{ et } A'B' : A'C' :: B'b' : C'c';$$

et comme on a par hypothèse,

$$AB : BC :: A'B' : B'C', \text{ ou } AB : AC :: A'B' : A'C',$$

on en conclura que

$$Bb : Cc :: B'b' : C'c';$$

mais la droite CC′ étant parallèle à AD, elle est aussi parallèle au plan A′AD, ainsi on a $Cc = C'c'$; donc

$$Bb = B'b'.$$

Donc tous les élémens tels que BB′ sont parallèles au plan A′AD, mené par un élément AA′, parallèlement à un autre élément CC′ : donc, etc.

224. Les paraboloïdes hyperboliques jouissent d'une autre propriété bien remarquable : c'est que AA′ et CC′ étant deux positions de la génératrice Fig. 3.
d'une de ces surfaces, une droite, mobile sur les élémens AA′ et CC′ de manière qu'elle soit constamment parallèle à un plan parallèle aux deux premières directrices AC, A′C′, engendrera le même paraboloïde hyperbolique.

Nous allons démontrer cette belle propriété en faisant voir que chaque point d'un élément de la seconde génération est sur un élément de la première, et réciproquement : c'est-à-dire que le paraboloïde engendré selon la seconde génération, n'a pas de point qui ne soit sur le paraboloïde engendré selon la première, et qu'il en est de même de ce dernier par rapport au premier, ou que ces deux paraboloïdes ne font qu'une même surface.

Soit mn une position de la droite mobile le long de AA′ et CC′. Menons par les points C et C′ des parallèles Cc, C′c' à mn; et soient c et c' les points où elles rencontrent le plan AA′D parallèle à CC′. Enfin, menons Ac et A′c', et joignons les points c et c' par une droite cc'; cette droite sera l'intersection du plan AA′D avec le plan de l'élément CC′ et des parallèles Cc, mn et C′c' : donc elle passera par le point n où mn coupe AA′.

Pl. 9. Fig. 3. Cela posé, prenons sur *mn* un point quelconque O, et concevons par ce point un plan parallèle au plan AA'D; il coupera les directrices AC, A'C', de la première génération, en deux points B et B'; et comme le plan AA'D peut être pris pour le plan directeur de cette génération, les points B et B' détermineront l'élément BB', de cette même première génération. Or, le point O appartient à cet élément : en effet, si l'on mène les droites B*b*, B'*b*', parallèles à *mn*, elles détermineront les triangles AB*b*, A'B'*b*', semblables à AC*c*, A'C'*c*'; donc on aura

$$AB : AC :: Ab : Ac, \text{ et } A'B' : A'C' :: A'b' : A'c'.$$

Mais (222) AB : AC :: A'B' : A'C'; donc

$$Ab : Ac :: A'b' : A'c'.$$

Maintenant remarquons que la droite *mn* étant mobile parallèlement à un plan parallèle aux deux premières directrices AC, A'C', les plans AC*c*, A'C'*c*', sont nécessairement parallèles. Donc les intersections A*c*, A'*c*', de ces plans avec AA'D sont aussi parallèles. Et, puisque ces intersections sont divisées par les points *b* et *b*' en parties proportionnelles, il s'ensuit que les trois points *b*, *n* et *b*', sont en ligne droite; donc le plan des lignes B*b*, B'*b*', contient les droites BB' et *mn*; donc enfin le point O, de l'élément *mn* de la seconde génération, est sur un élément BB' de la première.

On prouverait de même que chaque point d'un élément BB' de la première génération, appartient à un élément de la seconde : ainsi tout paraboloïde hyperbolique est susceptible d'être engendré de deux façons par une droite.

225. Il est clair, d'après ce qui précède, que les deux directrices et le plan directeur d'une génération étant donnés, deux élémens de cette génération, et un plan parallèle aux deux directrices données, seront les directrices et le plan directeur de l'autre génération. Et si de la seconde génération on voulait déduire la première, on prendrait deux élémens de celle-là, et un plan parallèle aux deux directrices correspondantes, et l'on aurait le plan directeur et les droites directrices de celle-ci. D'où l'on voit que les deux générations se déduisent l'une de l'autre absolument de la même manière.

226. DES SURFACES GAUCHES *qui ont trois directrices linéaires.* Si l'on impose à la génératrice la condition de toucher constamment une troisième ligne directrice, au lieu de celle de rester toujours parallèle à un plan

directeur, il est clair que les surfaces engendrées seront encore des surfaces gauches, à moins que les trois directrices n'aient entre elles des relations convenables pour que deux élémens consécutifs soient en général dans le même plan (214).

227. Soit donc (AB, A'B'), (CD, C'D'), (EF, E'F'), les trois directrices d'une surface gauche, et cherchons la position de la génératrice qui correspond à un point (M, M') de l'une de ces directrices, de la première, par exemple. Pour cela nous prendrons la deuxième directrice (CD, C'D') pour base d'un cône dont le point (M, M') soit le sommet; nous construirons le point (N, N'), où la troisième directrice (EF, E'F') percera ce cône; nous menerons la droite (MN, M'N'); elle touchera évidemment les trois directrices données, et sera par conséquent la position cherchée de la génératrice, ou, ce qui revient au même, un élément de la surface. Pl. 14.

Pour exécuter ces constructions, nous prendrons sur la deuxième directrice une suite de points (D, D'), (a, a'), (b, b'), etc.; par ces points et par le sommet (M, M'), nous menerons les droites (MD, M'D'), (Ma, $M'a'$), (Mb, $M'b'$), etc.; nous construirons les points (F, H), (i, i'), (j, j'), etc., où ces droites percent le cylindre vertical FE; nous menerons, par les projections verticales H, i', j', h', etc., de ces points, la courbe H$i'j'h'k'l'$...; elle rencontrera F'E' en un point N'; on déterminera le point N correspondant à N', et (N, N') sera l'intersection de la troisième directrice avec le cône dont la base est (CD, C'D') et le sommet (M, M'). En effet, le cylindre vertical FE est coupé par le cône auxiliaire suivant la ligne (F$ijkl$..., H$i'j'k'l'$...); mais ce cylindre contient la troisième directrice; donc il contient le point (N, N')) où elle perce le cône; donc ce point, situé tout à la fois sur le cône et sur le cylindre, ou, ce qui revient au même, sur leur intersection, est commun aux deux lignes (F$ijkl$..., H$i'j'k'l'$...), (EF, E'F'): donc enfin, il a pour projection verticale le point N'. Ce point une fois connu, le point N s'ensuit, puis les projections MN, M'N', de l'élément cherché.

On construira, par ce procédé, autant de positions de la génératrice qu'on en voudra; ainsi la représentation de la surface donnée sera facile à obtenir.

228. Si les trois directrices (AB, A'B'), (CD, C'D'), (EF, E'F'), deviennent à la fois des lignes droites, la surface correspondante sera ce qu'on appelle un *hyperboloïde à une nappe* (*).

(*) Ce nom vient de ce qu'une telle surface peut toujours être produite par le moyen d'une hyperbole. En général, le nom d'*hyperboloïde* se donne à toute surface engendrée par une hyperbole, mobile autour de l'un de ses axes, de façon que les sections perpendiculaires à cet axe soient elliptiques. Si le mouvement se fait autour de l'axe réel, la surface a deux nappes isolées; s'il se fait autour de l'axe imaginaire, elle n'en a qu'une: c'est le cas du n° 228. Si les sections perpendiculaires à l'axe immobile sont des cercles, l'hyperbole génératrice est constante de forme, et l'hyperboloïde est de révolution à une ou à deux nappes (209 et 236).

Cette surface jouit d'une propriété analogue à celle que nous avons démontrée pour le paraboloïde hyperbolique (224) : c'est qu'elle peut être engendrée par une seconde droite, mobile sur trois élémens quelconques de la première génération.

Pl. 9. Fig. 2. 229. Pour démontrer cette propriété, soient AC, A′C′, A″C″, trois droites directrices d'un hyperboloïde à une nappe, et AA″, BB″, CC″, trois élémens de cet hyperboloïde. Il s'agira de faire voir que toutes les droites qui touchent les trois élémens AA″, BB″, CC″, ont tous leurs points sur la surface donnée, ou, ce qui revient au même, qu'une génératrice *mm″*, en se mouvant sur les trois directrices données AC, A′C′, A″C″, touche un élément quelconque *ab*, de la seconde génération, successivement suivant tous ses points; ce qui exige seulement qu'un élément quelconque *mm″*, de la première génération, rencontre chaque élément *ab* de la seconde.

Voyons d'abord comment on pourra construire les élémens des deux générations.

230. La directrice A′C′ et l'élément BB″ devant se rencontrer, les droites A′B, B″C′, sont dans un même plan, et se coupent en un point D. Mais la droite A′B est dans le plan AA″C; la droite B″C′ est dans le plan A″C″C : donc le point D est un point de l'intersection A″C des plans A″AC, A″C″C. On prouverait de même que les deux droites A′B″, BC′, se coupent en un point E de AC″. On voit donc par là que deux droites A′C′, BB″, se rencontrant et s'appuyant sur les côtés opposés d'un quadrilatère AA″C″C, qu'on nomme *quadrilatère gauche*, parce que tous ses points ne sont pas dans un même plan, les quatre points d'appui A′ et B, B″ et C′, forment un quadrilatère plan, dont les côtés opposés A′B et B″C′, A′B″ et BC′, se coupent respectivement en des points D et E des diagonales A″C, AC″, du quadrilatère gauche.

Réciproquement, si quatre points A′, B″, C′, B, du quadrilatère gauche, sont tels, que les droites A′B et B″C′, A′B″ et BC′, se coupent en des points D et E des diagonales A″C, AC″, les quatre points A′, B″, C′ et B, sont dans un même plan, et ils forment par conséquent un quadrilatère plan dont les diagonales A′C′, BB″, se coupent et s'appuient sur les côtés opposés du quadrilatère gauche.

231. D'après cela, étant données les trois directrices AC, A′C′, A″C″; étant donnés deux élémens AA″, CC″, et enfin étant donné un point B de la droite indéfinie AC, on déterminera facilement l'élément BB″ correspondant au point B. En effet, si l'on mène la droite A′B, qui coupe A″C

en un point D, puis, par le point D et par le point connu C′, la droite DC′, Pl. 9. Fig. 2.
cette droite ira couper A″C″ en un point B″, par lequel passera l'élément cherché BB″. On aurait le même résultat en menant par les points B et C′ la droite BC′, qui couperait la diagonale AC″ en un point E, puis par ce point et le point connu A′, la droite EA′, qui couperait A″C″ au point B″ qu'il fallait trouver (*).

L'élément *mm″* se construira comme BB″.

Et si l'on veut avoir une droite *ab*, passant par un point *a* de AA″ et touchant les droites BB″ et CC″, il n'y aura qu'à déterminer le point *b* de cette droite, au moyen des points B, B″, et de l'une des diagonales A″C, AC″, comme on vient de construire B″, au moyen de A′, C′, et d'une des mêmes diagonales.

232. Maintenant on remarquera que le point B″, d'un élément BB″, se déduisant de la position du point B, il faut nécessairement qu'il y ait entre les diverses parties du quadrilatère gauche une relation qui détermine la position du point B″. Pour obtenir cette relation, nous menerons dans le plan A″AC, la droite Cx parallèle à A″A′. Les triangles AA′B et BCx, A″A′D et CxD, étant semblables, nous aurons

$$A'A : AB :: Cx : BC, \text{ et } DA'' : A''A' :: DC : Cx.$$

D'où nous tirerons en multipliant terme à terme et réduisant,

$$A'A \times DA'' : AB \times A''A' :: DC : BC,$$

ou

$$A'A \times BC \times DA'' = A''A' \times AB \times DC \ldots (a),$$

égalité qui exprime que lorsqu'une sécante DA′ coupe les côtés d'un triangle A″AC, ou les prolongemens de ces côtés, les six segmens A′A et A″A′, BC et AB, DA″ et DC, sont tels que le produit de trois d'entre eux A′A, BC, DA″, qui n'ont pas d'extrémités communes, ou, ce qui revient au même, qui sont discontinus, est le même que celui des trois autres segmens A″A′, AB, DC, qui aussi sont discontinus (**).

(*) Ces constructions s'appliquent évidemment au paraboloïde hyperbolique, tout comme à l'hyperboloïde à une nappe. Il en est de même (235) des démonstrations qui suivent.

(**) La démonstration qu'on vient de voir est extraite de la *Théorie des transversales* de M. Carnot, page 66.

Pl. 9. Fig. 2. 233. Dans le triangle $A''C''C$, coupé par la sécante DB'', on aura donc, en écrivant d'abord le second membre,

$$A''B'' \times C''C' \times DC = B''C'' \times C'C \times DA'' \ldots (b).$$

Ce qui donnera, en multipliant les deux égalités (a) et (b) membre à membre,

$$A'A \times A''B'' \times C''C' \times BC \times DA'' \times DC = A''A' \times B''C'' \times C'C \times AB \times DA'' \times DC,$$

ou, en supprimant le facteur commun $DA'' \times DC$, et en mettant les lettres dans l'ordre où se suivent les grandeurs qu'elles désignent,

$$AA' \times A''B'' \times C''C' \times CB = A'A'' \times B''C'' \times C'C \times BA \ldots (c).$$

Et comme cette égalité est due à la suppression du facteur $DA'' \times DC$, on remarquera qu'elle n'aurait pas lieu si la sécante $B''C'$ coupait la diagonale $A''C$ en un point D' différent du point D, car ce facteur serait alors $DA'' \times D'C$ pour le premier membre, et $DA'' \times DC$ pour le second.

Nous conclurons de là que par cela seul que les deux sécantes DA', DB'', sont menées par un même point D de $A''C$, ou, ce qui est la même chose, *par cela seul que les quatre points* A', B, C', B'', *d'un quadrilatère gauche, forment un quadrilatère plan, le produit des quatre segmens discontinus* AA', $A''B''$, $C''C'$, CB, *est égal à celui des quatre autres segmens aussi discontinus* $A'A''$, $B''C''$, $C'C$, BA, *et réciproquement* (*).

234. Cela posé, nous remarquerons que de quelque manière que $A'C'$ divise les côtés AA'', CC'', on aura toujours

$$\frac{AA'}{A'A''} = p\,\frac{C'C}{C''C'} \ldots (d),$$

ou

$$AA' \times C''C' = p \times C'C \times A'A'',$$

p étant un nombre égal au quotient de $\frac{AA'}{A'A''}$ divisé par $\frac{C'C}{C''C'}$. Or, mettons cette valeur de $AA' \times C''C'$ dans l'égalité (c), nous aurons

$$p \times A'A'' \times C'C \times A''B'' \times CB = A'A'' \times B''C'' \times C'C \times BA,$$

(*) La manière dont ce théorème vient d'être déduit de celui du triangle est tirée de la *Correspondance de M. Hachette*, tome III, page 6, article de M. Chasles.

Le même ouvrage, tome II, page 446, donne la démonstration du n° 234.

ou, en réduisant

$$p \times A''B'' \times CB = B''C'' \times BA;$$

ce qui donne l'égalité

$$\frac{AB}{BC} = p\,\frac{A''B''}{B''C''}, \ldots (e)$$

laquelle nous apprend que le point B″, où l'élément correspondant au point B s'appuie sur la droite A″C″, est placé sur cette droite de telle sorte que le quotient de $\frac{AB}{BC}$ divisé par $\frac{A''B''}{B''C''}$ est le même nombre p qui est le quotient de $\frac{AA'}{A'A''}$ divisé par $\frac{C'C}{C''C'}$.

Donc mm'' étant l'élément qui correspond au point m, on aura

$$\frac{Am}{mC} = p\,\frac{A''m''}{m''C''}.$$

De même si ab est une droite qui touche AA″, BB″ et CC″, elle sera dans le même cas que BB″ touchant AC, A′C′, A″C″, ce qui donnera

$$\frac{Aa}{aA''} = p\,\frac{Cb}{bC''}.$$

Tirons les valeurs de p de ces deux dernières égalités; nous trouverons

$$p = \frac{Am \times m''C''}{A''m'' \times mC}, \text{ et } p = \frac{Aa \times bC''}{Cb \times aA''}.$$

D'où résulte

$$\frac{Am \times m''C''}{A''m'' \times mC} = \frac{Aa \times bC''}{Cb \times aA''},$$

ou

$$Am \times Cb \times C''m'' \times A''a = Aa \times A''m'' \times C''b \times Cm.$$

Et comme cette égalité ne peut avoir lieu (233) qu'autant que le quadrilatère formé par les quatre points a, m, b, m'', est un quadrilatère plan, il s'ensuit que les deux droites ab, mm'', se coupent: ce qu'il fallait démontrer (229).

235. Nous ferons observer que le nombre p étant quelconque, les deux droites AA″, CC″, qui s'appuient sur les trois directrices AC, A′C′, A″C″, sont coupées par A′C′ d'une manière arbitraire, en sorte que l'équation (d) n'assujettit les droites données à aucune condition spéciale.

Si p, au lieu d'être quelconque, était égal à l'unité, on aurait

$$\frac{Am}{mC} = \frac{A''m''}{m''C''};$$

d'où l'on voit que la surface en question serait un paraboloïde hyperbolique (223). La double génération de cette surface résulte donc, comme cas particulier, de celle de l'hyperboloïde à une nappe.

Il est intéressant de vérifier la belle propriété que nous venons de démontrer sur une variété d'hyperboloïde qui sera souvent employée dans la suite.

236. Concevons dans l'espace deux droites quelconques, et imaginons que l'une serve d'axe, et l'autre de génératrice, à une surface de révolution. Cette surface, ainsi qu'on le démontrera bientôt (241), sera de l'espèce des hyperboloïdes à une nappe, et appartiendra à la variété de ces surfaces que l'on appelle *hyperboloïdes de révolution à une nappe* (452 note).

237. Prenons pour plan horizontal de projection un plan perpendiculaire à celle des droites données qui doit servir d'axe; et pour plan vertical un plan parallèle à l'autre droite (c'est-à-dire parallèle à la génératrice), et perpendiculaire au plan horizontal. D'après cela, soit (A, A'B') l'axe de révolution, et (CD, C'D') la droite génératrice. Chaque point de (CD, C'D') décrira un cercle horizontal dont le centre sera sur (A, A'B'); l'ensemble de ces cercles formera la surface en question, et deux positions consécutives de la génératrice auront leurs points correspondans séparés par des arcs circulaires horizontaux; donc ces positions n'auront aucun point commun entre elles; donc elles ne seront pas dans un même plan, car il est clair qu'elles ne seront pas parallèles; donc enfin, la surface engendrée sera tout-à-la-fois gauche et de révolution.

Pl. 9. Fig. 8.

238. Parmi les cercles de cette surface, il y en a un remarquable; c'est celui qu'engendre l'extrémité (L, L'), de la ligne de plus courte distance (AL, L'), comprise entre l'axe et la génératrice. Ce cercle est évidemment, de tous ceux de la surface, celui dont le rayon est le plus petit; sa projection horizontale est la circonférence *iqo*L, et sa projection verticale la droite *i'o'*, parallèle à la ligne de terre. Il est évident qu'il occupe la partie la plus étroite de la surface, et on le nomme, par cette raison, le *cercle de la gorge*.

239. Décrivons le cercle (CED, C'D''), engendré par la trace horizontale (C, C') de la génératrice, et menons par le point (D, D''), où ce cercle est rencontré par la projection DC de cette même génératrice, la droite (DC, D''C''), qui a même projection horizontale que (CD, C'D'), et qui fait avec le plan horizontal le même angle que cette dernière droite. Il est évident que l'axe (A, A'B') sera situé de la même manière par rapport à

(CD, C'D') et par rapport à (DC, D''C''); donc, si l'on mène un plan quelconque perpendiculaire à l'axe de révolution, il coupera les droites (CD, C'D'), (DC, D''C'') et (A, A'B'), suivant trois points, tels que les deux premiers soient également distans du troisième, et tels, par conséquent, qu'ils appartiennent à un même cercle, décrit de ce dernier point comme centre. Donc, si l'on fait tourner la droite (DC, D''C'') autour de l'axe de révolution, chacun des points de cette droite engendrera un cercle, déjà engendré par un point de la droite (CD, C'D'); donc la droite (DC, D''C''), engendrera dans sou mouvement la surface de révolution dont nous nous occupons. Pl. 9. Fig. 8.

Cette surface est donc susceptible d'être engendrée de deux manières par le moyen d'une droite. Et comme on peut supposer que les deux génératrices (CD, C'D'), (DC, D''C''), soient en mouvement en même temps, et de telle sorte que le plan projetant CD tourne autour du cylindre vertical *io*L, auquel il est tangent, en les emportant toutes deux avec lui, il est aisé de voir qu'aucune position de la première ne se confond avec aucune position de la seconde.

240. Mais toutes les positions de la première rencontreront chaque position de la seconde, et réciproquement. En effet, prenons pour exemple l'élément (DC, D''C'') de la seconde génération, et faisons mouvoir la première génératrice (CD, C'D') autour de (A, A'B'); je dis que chaque position de la droite mobile coupera la droite (DC, D''C''). Pour le prouver, supposons en premier lieu que le point (C, C') soit venu sur le cercle CED, en un point quelconque (E, *e*), tel que les lignes CD, EG, tangentes à la circonférence *iqo*L, se croisent sur le côté droit de AA'; la droite (CD, C'D') aura la position (EG, *eg*). Or, les deux lignes (LC, L'C''), (*o*G, *o'g*), se trouveront sur la partie de la surface située au-dessus de la gorge (*oqi*L, *o'i'*); donc elles se rencontreront en un point (*n*, *n'*); donc l'élément (DC, D''C''), sera rencontré par l'élément (EG, *eg*). Supposons en second lieu que le point (C, C') soit arrivé en un point (I, D'') de CED, tel que la génératrice (CD, C'D') ait la position (IK, D''C''), parallèle au plan vertical : les élémens (DC, D''C''), (IK, D''C''), de deux générations différentes, seront parallèles entre eux; donc ils se couperont à l'infini. Enfin, supposons que le point (C, C') vienne occuper un point quelconque (E', *e'*) de l'arc IDGC; la génératrice (CD, C'D') aura la position (E'G', *e'g'*); les parties (DL, D''L'), (E'*i*, *e'i'*), des deux élémens (DC, D''C''), (E'G', *e'g'*), seront sur la portion de surface inférieure au cercle de la gorge; donc ces deux élémens se cou-

Pl 9. Fig. 8. peront en un point (m, m'). Donc toutes les positions de la première génératrice (CD, C'D'), coupent l'élément (DC, D''C'') de la seconde génération; mais cet élément n'a rien de particulier sur la surface : donc, etc.

Nous ferons remarquer en passant que le point de rencontre (L, L'), de la droite (DC, D''C'') et de la génératrice (CD, C'D'), s'éloigne de plus en plus de sa position primitive, en s'élevant sur (LC, L'C''), à mesure que le point (C, C') s'avance vers le point I, par les points K et E. Lorsque (C, C') est en I, le point de rencontre est à l'infini sur (LC, LC''), et à mesure que ce même point (C, C') s'approche par D et G de sa position primitive C, le point de rencontre en question, mobile alors sur (LD, L'D''), se rapproche peu à peu de (L, L'), et vient enfin coïncider avec ce point, au moment où la génératrice termine sa révolution entière.

241. De ce que chaque position d'une génératrice coupe toutes les positions de l'autre, il s'ensuit que si l'on prend trois élémens d'une génération, et qu'on demande l'élément de l'autre génération mené par un point donné d'un de ces trois élémens, la droite qui touchera ces trois mêmes élémens, et qui passera par le point donné, sera l'élément demandé. Donc, si l'on fait mouvoir une droite sur ces trois élémens, elle occupera successivement toutes les positions de la seconde génératrice; donc enfin, la surface dont nous nous occupons est de l'espèce des hyperboloïdes à une nappe (228).

Et, comme on peut prendre les trois élémens directeurs, à volonté sur l'une ou sur l'autre génération de cette surface, nous en conclurons (ce qu'on savait déjà) qu'elle peut être produite de deux manières par une droite en mouvement sur trois droites.

La suite nous familiarisera encore avec les surfaces que nous venons d'examiner; l'essentiel pour le présent, c'est qu'on ait une idée claire de leurs générations.

242. Des surfaces gauches en général. Il est aisé de voir, d'après ce qui précède, que si l'on faisait mouvoir une droite sur deux courbes, de façon que sa partie comprise entre elles fût d'une longueur invariable, ou que son angle avec un plan connu fût constant, ou qu'elle rencontrât l'une de ces deux directrices sous un angle donné, etc., ou qu'on la fît mouvoir sur trois surfaces, ou sur une courbe et deux surfaces, ou sur une surface et deux courbes, ou sur deux surfaces en faisant un angle connu avec un plan donné, etc., etc.; chaque mode de mouvement de cette droite, donnerait, sauf des exceptions particulières, un nouveau genre de surfaces gauches.

Nous n'entrerons pas dans les détails où nous conduirait l'examen de ces divers genres; la plupart offrent peu d'intérêt, et il sera d'ailleurs question dans le Complément (694—745),

de ceux qui présentent quelque utilité : mais avant d'aller plus loin, nous allons démontrer une propriété qui sera fréquemment employée par la suite.

243. Voici cette propriété : *Si l'on fait tourner un plan autour d'un élément* K *d'une surface gauche, il sera, en général, tangent à cette surface, dans chacune des positions qu'il occupera, suivant un point de l'élément* K.

Considérons une position P du plan dont il s'agit. Soit K′, K″, K‴... une suite d'élémens de la surface gauche, situés au-delà de l'élément K ; soit ′K, ″K, ‴K, etc., une suite d'élémens de la même surface, situés en-deçà de K, et supposons que tous ces élémens soient consécutifs et placés sur la surface dans l'ordre... ‴K, ″K, ′K, K, K′, K″, K‴..., indiqué par les accens.

A moins de circonstances particulières, le plan P ne sera parallèle à aucun de ces élémens ; ainsi, il les coupera tous, sauf l'élément K qu'il contient, suivant une suite de points... ‴*k*, ″*k*, ′*k*, *k*′, *k*″, *k*‴..., infiniment rapprochés les uns des autres, et formant une courbe... ‴*k*″*k*′*kk*′*k*″*k*‴... Mais les points ′*k* et *k*′ seront de deux côtés opposés de l'élément K ; donc la partie infiniment petite ′*kk*′ de la courbe... ‴*k*″*k*′*kk*′*k*″*k*‴... coupera l'élément K en un point.

Nommons *k* ce point ; je dis qu'il sera le point de contact du plan P et de la surface gauche : en effet, la courbe... ‴*k*″*k*′*kk*′*k*″*k*‴... est dans le plan P ; donc ce plan contient la tangente à cette courbe en *k* : mais il contient aussi l'élément K, qui est lui-même sa tangente ; donc il contient les tangentes en *k* à deux lignes qui se croisent par ce point sur la surface donnée (148) : donc, etc.

Il en sera ainsi pour les autres positions du plan mené par l'élément K ; ainsi, en général, ce plan dans toutes ses positions touchera la surface donnée.

244. Et comme la courbe.... ‴*k*″*k*′*kk*′*k*″*k*‴... variera selon la position du plan P, il est clair que lorsque ce plan tournera autour de l'élément K le point de contact *k* se mouvra le long de cet élément.

245. De la propriété qui vient d'être démontrée, et de la démonstration que nous en avons donnée (243), nous conclurons en général, premièrement, que tout plan tangent à une surface gauche est aussi un plan coupant de cette surface ; secondement, que si l'on veut avoir un plan tangent à une surface gauche, il ne s'agira que de mener ce plan par un élément de la surface ; troisièmement enfin, que si l'on construit l'intersection du plan et de la même surface, le point où cette intersection coupera l'élément sera le point de contact.

Il y a toutefois des cas particuliers où le plan tangent touche la surface tout le long de l'élément qu'il contient (334 et 339) ; la propriété générale dont il s'agit est alors en défaut.

246. Il peut arriver aussi que le plan coupant soit tangent à l'infini ; dans ce cas, on ne peut pas dire que la courbe ...‴*k*″*k*′*kk*′*k*″*k*‴... n'existe pas, mais seulement qu'elle est située à une distance infinie, et la propriété générale est véritablement satisfaite.

Supposons, par exemple, que la surface donnée soit un paraboloïde hyperbolique (221), et concevons que le plan P tourne autour de l'élément K, à partir d'une position initiale quelconque. La courbe... ‴*k*″*k*′*kk*′*k*″*k*‴... ne sera autre chose que le second élément du paraboloïde ; et à mesure que le plan P s'approchera d'être parallèle au plan directeur,

le second élément s'éloignera le long de l'élément K; le point de contact s'éloignera pareillement, et ce second élément sera de moins en moins incliné avec le plan P. Lorsqu'enfin ce plan sera parallèle au plan directeur, le second élément sera à l'infini, et tout aussi bien à l'une qu'à l'autre des extrémités de l'élément K; la courbe... $''k''k'kkk'k''k''$... sera donc, pour cette position spéciale, formée par deux lignes droites; ces lignes seront parallèles au plan directeur, et le plan P sera tangent à la surface aux deux extrémités de la droite indéfinie K. Si ce plan continue son mouvement, le point de contact, passé à la partie de l'élément K opposée à celle qu'il aura d'abord parcourue, reviendra peu à peu dans sa position initiale en parcourant l'autre partie.

Il est clair que les facettes infiniment petites traversées par l'élément K sur la surface donnée s'approcheront de plus en plus, vers les extrémités de cet élément, de coïncider avec le plan P; et que, cependant, la coïncidence n'aura jamais lieu, ou, ce qui est la même chose, n'aura lieu qu'à l'infini. Le plan P, parallèle au plan directeur, est ce qu'on nomme par cette raison un *plan asymptote* (877 et 878) de la surface gauche.

247. Tout plan tangent en un point d'une surface gauche quelconque la coupant généralement suivant une courbe... $''k''k'kkk'k''k''$..., il s'ensuit que les surfaces gauches sont non convexes (150) en chacun de leurs points.

248. Jusqu'ici nous ne nous sommes presque point occupés de la représentation des surfaces gauches, la raison en est que cette représentation n'exige guère autre chose que la détermination des élémens de ces surfaces. Cependant, on marque aussi sur les plans de projection, conformément aux règles générales (156), les traces et les contours de la surface représentée.

Les traces sont données par celles des élémens; les contours sont des courbes tangentes aux projections des mêmes élémens (154): ainsi, la détermination des traces et des contours ne peut présenter aucune difficulté.

Il nous resterait à parler de l'exécution des planches 13 et 14, et des figures 5, 6 et 7, planche 9; mais elle est trop aisée pour qu'il soit nécessaire que nous nous y arrêtions.

CHAPITRE IV.

Des surfaces enveloppes.

249. DES SURFACES ENVELOPPES EN GÉNÉRAL. On appelle *surfaces enveloppes,* ou simplement *enveloppes*, les surfaces qui sont engendrées par le mouvement d'une autre surface, constante ou variable de forme, et qui enveloppent et touchent toutes les positions de la surface mobile.

Concevons, par exemple, que le centre d'une surface sphérique, constante de rayon, se meuve sur une courbe donnée. Deux positions consé-

cutives de cette surface auront leurs centres infiniment rapprochés, et se couperont par conséquent suivant un grand cercle dont le plan sera perpendiculaire à la directrice. Or, l'ensemble de tous ces grands cercles formera une surface particulière, qui touchera et enveloppera chaque position de la sphère mobile, et qui sera ce qu'on appelle l'enveloppe de l'espace parcouru par cette sphère.

En général, si l'on conçoit qu'une surface varie de forme et de position suivant une loi donnée, deux positions consécutives de cette surface se coupent ou se touchent (c'est la même chose, puisqu'elles sont infiniment voisines et qu'elles diffèrent infiniment peu) suivant une courbe particulière, et l'ensemble de ces courbes est ce qu'on nomme une surface enveloppe.

250. On donne le nom d'*enveloppée* à la surface mobile et à chacune de ses positions.

L'intersection de deux enveloppées consécutives est une véritable génératrice, dont les variations de forme et de position sont données par le mouvement de l'enveloppée. Mais cette intersection étant d'une même nature pour toutes les enveloppes qui sont produites par la même enveloppée, *elle imprime*, ainsi qu'on le verra par la suite (275), *un caractère général à toutes les surfaces soumises à la même génération*, et c'est ce qui lui a fait donner par M. Monge le nom de *caractéristique*.

251. Il suit de la définition des enveloppes qu'elles touchent chacune de leurs enveloppées suivant la caractéristique correspondante; c'est-à-dire que les plans tangens à une enveloppée, suivant des points de la caractéristique, sont aussi tangens à l'enveloppe.

Concevons qu'une surface, constante ou variable de forme, se meuve dans l'espace en restant assujettie à une loi donnée. La première position de cette surface sera coupée ou touchée par la position infiniment voisine suivant une position de la caractéristique; la seconde position de l'enveloppée sera coupée par la troisième suivant une seconde caractéristique qui différera infiniment peu de la première, et qui en sera infiniment rapprochée; la troisième position de la surface coupera la quatrième suivant une troisième caractéristique, et ainsi de suite.

D'après cela, une enveloppée quelconque étant coupée ou touchée par l'enveloppée qui la précède, et par celle qui la suit, suivant deux positions consécutives de la caractéristique, il en résulte que ces deux positions sont sur une même enveloppée, et par conséquent que deux caractéristiques con-

sécutives, généralement parlant, se touchent ou se coupent sur une enveloppée, comme deux enveloppées consécutives se touchent ou se coupent sur l'enveloppe.

La suite de tous ces points d'intersections consécutives, ou de contacts consécutifs, forme sur l'enveloppe une courbe particulière remarquable, qui touche toutes les caractéristiques, comme l'enveloppe touche toutes les enveloppes, et qui a reçu le nom d'*arête de rebroussement*.

252. Les arêtes de rebroussement sont, comme nous allons en voir un exemple (264) et comme nous le démontrerons par la suite (747), des lignes apparentes des enveloppes, suivant lesquelles se réunissent par un véritable rebroussement deux nappes (155) distinctes de ces surfaces.

L'une de ces nappes est formée par l'ensemble des parties que les caractéristiques ont d'un côté de l'arête de rebroussement, et l'autre nappe, par les parties des mêmes caractéristiques situées de l'autre côté des points de la même arête.

253. DES SURFACES DÉVELOPPABLES. Parmi les différentes sortes de surfaces enveloppes, il y a un genre bien remarquable et bien utile dans les arts : c'est celui des *surfaces développables*.

On appelle ainsi les surfaces qui, étant supposées flexibles et inextensibles, sont de nature à pouvoir s'appliquer sur un plan, au moyen de simples flexions, sans déchirure et sans duplicature.

254. D'après cela, si un plan se meut dans l'espace en restant assujetti à une loi déterminée, il est facile de voir que l'enveloppe de son mouvement sera une surface développable. En effet, la première position de ce plan sera coupée par la seconde suivant une droite; la seconde sera coupée par la troisième suivant une seconde droite; la troisième par la quatrième suivant une troisième droite, et ainsi de suite, en sorte que l'enveloppe sera composée d'une infinité d'élémens plans, compris chacun entre deux droites communes à ses deux voisins. Cela posé, concevons qu'un premier élément plan tourne autour de son intersection avec le suivant, pour se rabattre sur le plan de ce dernier; que le plan formé par ces deux élémens tourne autour de l'intersection du second avec le troisième, pour se rabattre sur le plan du troisième; que le plan de ces trois premiers élémens tourne autour de l'intersection du troisième et du quatrième, pour se rabattre sur le plan de ce dernier, et ainsi de suite, on verra que l'enveloppe du plan mobile est susceptible d'être appliquée sur un plan, sans qu'elle se déchire et sans

qu'elle se double, et que cette enveloppe est par conséquent une surface développable (253).

255. Il est visible aussi que pour qu'une surface soit développable, il faut qu'elle soit composée d'élémens plans, unis par des bords indéfinis en ligne droite : ainsi, l'enveloppe des positions successives d'un plan mobile est une surface développable; et, réciproquement, une surface développable est l'enveloppe d'un plan mobile.

256. Le plan étant donc l'enveloppée d'une surface développable quelconque, il s'ensuit que la caractéristique de ces surfaces est toujours une droite. Et comme deux caractéristiques consécutives d'une enveloppe sont toujours sur une même enveloppée, deux droites élémentaires consécutives d'une surface développable sont toujours sur un même plan, et se rencontrent par conséquent en un point. La suite des points d'intersection des caractéristiques consécutives forme sur chaque surface développable une courbe particulière, qui est l'arête de rebroussement de cette surface.

257. Cette arête touche les droites élémentaires de la surface, comme la surface touche les positions du plan mobile; car chaque caractéristique ayant deux points consécutifs communs avec l'arête de rebroussement, savoir : celui où elle est coupée par la caractéristique précédente, et celui où elle est coupée par la caractéristique suivante, il en résulte que chaque caractéristique, ou, ce qui revient au même, chaque droite élémentaire de la surface, est tangente à l'arête de rebroussement.

258. Chaque élément est divisé en deux parties par l'arête de rebroussement; et toutes les parties situées d'un même côté de cette arête forment une nappe de l'enveloppe. D'après cela, toute surface développable est, généralement parlant, composée de deux nappes, qui se réunissent suivant ce qu'on appelle son arête de rebroussement.

259. La loi du mouvement du plan mobile peut être donnée d'une infinité de manières : ainsi, on peut assujettir ce plan à être constamment normal à une courbe donnée, ou tangent à deux surfaces données, ou à toucher une surface donnée suivant les points d'une courbe connue sur cette surface, etc., etc.

260. On peut concevoir aussi qu'une surface développable quelconque soit engendrée indépendamment de son enveloppée : car si l'on fait mouvoir une droite de façon qu'elle soit constamment tangente à l'arête de rebroussement de cette surface, deux positions consécutives de la droite

mobile seront dans un même plan, et l'ensemble de ces positions formera la surface développable en question.

261. Ce plan, qui passe par deux tangentes consécutives d'une courbe, étant ce qu'on appelle le plan osculateur de cette courbe (95), on voit *que toute surface développable est l'enveloppe d'un plan mobile constamment osculateur à l'arête de rebroussement de cette surface.*

262. Parmi les surfaces que nous avons examinées, les surfaces cylindriques et coniques sont des surfaces développables. En effet, si l'on imagine qu'un plan toujours parallèle à la direction des élémens d'un cylindre, ou passant toujours par le sommet d'un cône, se meuve de manière à contenir constamment la tangente à la directrice, les positions consécutives de ce plan se couperont dans le premier cas, suivant les élémens du cylindre, et dans le deuxième cas suivant les élémens du cône.

263. Pour éclaircir ce qui précède, nous allons faire connaître une surface développable sur laquelle on voit aisément toutes les propriétés qui viennent de nous occuper.

Pl. 15. Soit (ABCDE, A'B'C'D'E') une hélice circulaire, dont le cercle horizontal ABCDE soit la base, et menons à cette hélice une suite de tangentes (AF, A'F'), (BG, B'G'), (CH, C'H'), etc. Il est clair, d'après ce que nous avons dit (260), que toutes ces tangentes formeront une surface développable dont l'hélice donnée (ABCDE, A'B'C'D'E') sera l'arête de rebroussement.

Nous avons vu (113) que la série des points A, *m*, *n*, O, P, Q..., où les tangentes (AF, A'F'), (BG, B'G'), (CH, C'H'), etc., d'une hélice (ABC..., A'B'C'...), percent le plan horizontal, forment une courbe A*mn*OPQ, qui est la développante de ABCDE. Or, le plan horizontal de projection est ici un plan horizontal quelconque; donc, si l'on coupe l'enveloppe dont nous nous occupons par un plan horizontal, arbitrairement choisi, on aura pour intersection la développante d'un cercle égal à ABCDE.

D'après cela, menons les plans horizontaux KK', LL', MM', F'N, G'J'; il sera facile de construire les points où ils sont percés par chaque élément de l'enveloppe, c'est-à-dire par chaque tangente de l'hélice donnée, et en joignant par un trait tous ceux de ces points qui sont dans un même plan, on obtiendra les intersections (A*mn*OPQ, KK'), (RSTU, LL'), (VEX, MM'), (FYZW, F'N), (GHIJA, G'J'), de l'enveloppe et des plans KK', LL', MM', etc.

Toutes ces intersections seront autant de développantes du cercle ABCD; et il est évident que leurs points de rebroussement (A, A'), (S, S'), (E, E'), (Z, Z'), (A', A"), seront les intersections de l'hélice donnée (ABC..., A'B'C'...) avec les plans KK', LL', MM', etc.

264. Cela posé, imaginons la caractéristique divisée en deux parties par son point de contact avec l'hélice donnée; nommons la partie qui est au-dessous de ce point, partie inférieure de la caractéristique, et l'autre, partie supérieure. Il est clair que chaque développante (VEX, MM') se trouvera divisée par son point de rebroussement (E, E') en deux branches (VE, ME'), (EX, E'M'), tellement que les parties inférieures des posi-

tions de la caractéristique perceront le plan MM' suivant la branche (VE, ME'), et les parties supérieures suivant (EX, E'M'). Pl. 15.

Or, nous avons dit que l'arête de rebroussement divisait la caractéristique en deux parties, et l'enveloppe en deux nappes; les branches RS, VE, FYZ, GHIJA, appartiennent donc à la nappe inférieure de l'enveloppe, et les branches A*mn*OPQ, STU, EX, ZW, à la nappe supérieure. Mais les branches de la première nappe rencontrent normalement, aux points (S, S'), (E, E'), (Z, Z'), (A, A''), le cylindre vertical ABCDE; celles de la seconde nappe partent de ces mêmes points, en revenant sur les premières aussi normalement au même cylindre : donc les deux nappes de l'enveloppe se joignent sur l'hélice donnée par un vrai rebroussement.

Cet exemple intéressant doit commencer à faire voir comment la génération d'une enveloppe produit une ligne de rebroussement.

265. Nous donnerons aux surfaces de la nature de celle que nous venons d'examiner le nom d'*héliçoïdes développables* (*). Leur caractère est d'avoir une hélice à base circulaire pour arête de rebroussement, ou, ce qui revient au même, c'est que l'enveloppée de ces surfaces est le plan qui passe par deux tangentes consécutives de cette hélice, c'est-à-dire son plan osculateur (261).

Chaque enveloppée devant toucher l'héliçoïde tout le long d'un de ses élémens, il est évident que l'enveloppée correspondante à l'élément projeté horizontalement en *d*DI, aura pour trace horizontale la tangente en *d* à la développante A*mnd*O. Il est facile de déduire de là que l'enveloppée qui correspond à chaque élément est la surface plane particulière menée par cet élément et par la plus courte distance entre ce même élément et l'axe de l'hélice.

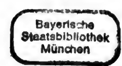
Nous démontrerons, n° 639, que les cylindres concentriques à celui qui contient l'arête de rebroussement coupent l'héliçoïde suivant des hélices de même pas (**).

266. Pour dessiner la figure avec facilité, nous avons d'abord construit l'hélice (ABC..., A'B'C'...), nous en avons déduit la développante GPIJA*mn*OPQ, et nous avons mené par les points A' et A'', où la projection verticale de l'axe de l'hélice coupe la sinusoïde A'B'C'D'..., les horizontales KK', G'J'. Cela fait, ayant supposé que la première branche de cette développante soit dans le plan horizontal G'J', et la seconde dans le plan horizontal KK', que nous avons choisi pour plan de projection, nous avons divisé le cercle ABCD en parties égales; par chaque point de division nous avons mené la tangente correspondante G*m*; nous avons pris cette tangente pour la projection horizontale d'un élément, et, pour avoir sa projection verticale G'*m'*, nous avons mis le point *m* en projection verticale en *m'* sur (A*mn*OPQ, KK'), le point G en projection verticale en G' sur (GHIA, G'J'), et nous avons mené la projection cherchée G'*m'*.

267. *Exécution de l'épure.* Pour mettre au trait les lignes construites, nous avons supposé l'enveloppe limitée aux plans horizontaux KK', G'J'. Il résulte de cette suppo-

(*) Il sera question dans le Complément (723) d'un genre de surfaces gauches que nous nommerons *héliçoïdes gauches*, qui ne doivent pas être confondues avec les héliçoïdes développables.

(**) On verra dans la suite (729) que l'héliçoïde gauche jouit aussi de cette propriété.



Pl. 15. sition que la courbe supérieure GHIJA est vue, ainsi que la nappe correspondante à cette courbe. La distinction des parties pleines et ponctuées des lignes de l'épure, en projection horizontale, s'ensuit tout naturellement. Quant à la projection verticale, elle ne présente aucune difficulté.

268. DE LA REPRÉSENTATION *des enveloppes; des surfaces de révolution comme enveloppes; etc.* Nous n'avons pas parlé jusqu'ici des moyens de représenter une enveloppe; mais il est facile de voir qu'on doit considérer la caractéristique comme une génératrice, construire un nombre suffisant de ses positions, et en déduire les traces de l'enveloppe et les contours de ses projections.

La planche 15 et les figures 2 et 3, pl. 12, offrent trois exemples de représentations d'enveloppes. Ce qui a été dit plus haut (263—267) éclaircit suffisamment ce qui est relatif au premier; et pour que l'on entende bien ce qui concerne les deux autres, il nous suffira de faire voir comment chaque surface de révolution est susceptible de plusieurs générations à la manière des enveloppes.

Pl. 12. Fig. 3. 269. Soit (O, O'O") l'axe d'une surface de révolution, et soit (yy', $umvxn\ldots n'x'v'm'u'$) la méridienne de cette surface. Menons par un point m une tangente mq à cette méridienne, et imaginons que la courbe et la tangente se meuvent en même temps autour de l'axe de révolution; il est clair que la courbe engendrera la surface donnée; que la tangente engendrera une surface conique droite, dont le sommet sera en (O, q), et que ces deux surfaces se toucheront suivant le cercle mm'. Or, si l'on imagine que le point m se meuve sur la méridienne, il est évident qu'il correspondra à chacune de ses positions une surface conique droite, analogue à celle dont le sommet est en (O, q); que deux surfaces coniques consécutives se couperont suivant une caractéristique circulaire mm', et que l'ensemble de ces caractéristiques formera la surface donnée. Donc cette surface n'est autre chose que l'enveloppe du mouvement d'un cône droit, dont l'axe est l'axe de révolution, et dont la génératrice est la tangente mq de la méridienne.

270. Par un point quelconque n' de la méridienne, menons la normale $n'r$ de cette méridienne, et du point r, intersection de $n'r$ et de O'O", comme centre, avec $n'r$ comme rayon, décrivons le cercle $nstn'$. Il est clair que ce cercle et la méridienne $umvxn\ldots n'x'v'm'u'$, se toucheront en n et n'; donc, si l'on imagine que le système du cercle et de la méridienne tourne autour de l'axe de révolution, le cercle engendrera une sphère, la méridienne engendrera la surface donnée, et ces deux surfaces se touche-

ront suivant le cercle nn'. Si donc on suppose que le point n' se meuve sur $u'm'v'x'n'$, il correspondra une surface sphérique à chacune de ses positions; ces surfaces consécutives se couperont suivant des caractéristiques circulaires nn', et l'enveloppe de ces surfaces sphériques sera la surface donnée.

271. Imaginons maintenant que la méridienne (yy', $umvxn\ldots n'x'v'm'u'$) soit la base d'un cylindre droit, dont la génératrice soit une ligne droite constamment perpendiculaire au plan yy'; il est clair que ce cylindre et la surface donnée se toucheront suivant la méridienne yy'. Or, imaginons que cette méridienne se meuve autour de l'axe de révolution, et qu'elle emporte avec elle le cylindre en question; il est évident que ce cylindre prendra une infinité de positions, qui se couperont consécutivement deux à deux suivant des méridiennes : donc l'enveloppe décrite ne sera autre chose que l'ensemble de ces méridiennes, c'est-à-dire que la surface donnée.

272. Il nous arrivera souvent de considérer une surface de révolution comme l'enveloppe d'un cône droit, vertical et variable de forme, mobile le long de l'axe commun à la surface et au cône; ou comme l'enveloppe d'une sphère mobile sur l'axe de révolution et variable de rayon; ou enfin comme l'enveloppe d'un cylindre horizontal constant de forme et mobile circulairement.

Dans quelques problèmes, on pourra substituer à une surface de révolution son enveloppée, conique, sphérique ou cylindrique; et comme il sera facile d'opérer sur l'enveloppée, on se trouvera conduit, par les propriétés des enveloppes, à un moyen de solution extrêmement utile (354—356, 375—377).

273. Quoique la génération des enveloppes paraisse fort abstraite, elle est cependant employée par beaucoup d'artistes, particulièrement par les tourneurs et par les ferblantiers.

Les derniers savent courber une feuille de fer-blanc autour d'une suite de droites, situées sur cette feuille, et tellement disposées que le plan de la feuille se change en une surface développable, dont ce plan, pendant le travail, est l'enveloppée mobile.

Les tourneurs finissent leurs ouvrages avec un instrument dont le taillant est une droite. Lorsqu'ils travaillent, ce taillant décrit, par rapport à la surface de révolution qu'ils veulent exécuter, une enveloppée conique de cette surface, et c'est en variant convenablement la direction de l'instrument, que les différentes zones des enveloppées se fondent imperceptiblement les unes et les autres avec la surface à faire.

274. Il est clair, d'après cela, que l'habitude doit donner aux ouvriers tourneurs et ferblantiers quelque idée de la génération des enveloppes; mais ce qui paraîtra peut-être

surprenant, c'est qu'ils en ont un sentiment très délicat, et que c'est ce sentiment qui leur fait connaître, à la simple inspection d'une surface, s'ils peuvent ou non l'exécuter.

Ainsi, en supposant qu'on ait rassemblé des modèles de surfaces développables, de surfaces de révolution, et de surfaces gauches (*), et qu'on demande à des ferblantiers et à des tourneurs intelligens de trier toutes celles qu'ils peuvent exécuter, on conçoit que le ferblantier mettra de côté toutes les surfaces développables, le tourneur toutes les surfaces de révolution, et qu'aucun des deux ne se chargera des surfaces gauches.

275. Or, les surfaces gauches sont le résultat du mouvement d'une droite, comme les surfaces développables : à quoi donc le ferblantier distinguera-t-il les premières des dernières? le voici. Dans les surfaces gauches, la droite mobile n'est qu'une simple génératrice, et, dans les surfaces développables, c'est une caractéristique placée sur une petite zone plane infiniment étroite, qui donne le sentiment de l'enveloppe, et qui indique au ferblantier qu'une enclume cylindrique ou conique pourra être substituée à cette enveloppée, et servir à ployer une feuille de fer-blanc convenablement pour en faire une surface développable.

De même, une surface de révolution peut être produite par le mouvement d'un cercle, comme toutes les surfaces cylindriques et coniques à bases elliptiques (**) : mais le cercle mobile n'est, dans ces surfaces, qu'une génératrice ordinaire, et, dans la surface de révolution, il est la courbe de contact de l'enveloppe et de l'enveloppée, c'est-à-dire une caractéristique. Or c'est cette caractéristique qui indique au tourneur qu'en faisant décrire à son ciseau, par rapport au corps à tourner, des surfaces coniques droites, ce ciseau, conduit avec intelligence, produira leur enveloppe, et pourra conséquemment servir à exécuter toutes les surfaces de révolution possibles, tandis qu'il ne peut pas servir à exécuter des surfaces développables qui ne seraient pas de révolution.

On conçoit par là que le nom de *caractéristique*, choisi par M. Monge, auquel on doit ces observations, est tout-à-fait convenable.

(*) Nous supposons qu'il n'y ait pas, parmi ces modèles, de surface à la fois gauche et de révolution, ou à la fois développable et de révolution.

(**) Une surface conique ou cylindrique à base elliptique peut toujours être coupée suivant des cercle par deux systèmes de plans parallèles (605 et 531).

LIVRE III.

PLANS TANGENS.

276. D'après ce qu'on a vu précédemment, il est facile de concevoir qu'un plan tangent peut être mené par son point de contact, supposé donné; par un point pris arbitrairement dans l'espace; parallèlement à une droite donnée; par une droite donnée; par un point donné et tangentiellement à deux surfaces données; tangentiellement à trois surfaces, etc., etc.

Il suit de là que la question de mener un plan tangent se présente sous plusieurs formes, selon qu'on donne, premièrement, le point de contact du plan cherché; secondement, un point qui appartienne à ce plan; troisièmement, une droite à laquelle il doive être parallèle; quatrièmement, une droite qu'il doive contenir; cinquièmement enfin, plusieurs surfaces qu'il doive toucher.

Chacun de ces cas, qui sont les plus usuels, va faire l'objet d'un des chapitres suivans.

CHAPITRE PREMIER.

Des plans tangens dont le point de contact est donné.

277. Nous nous donnerons ordinairement le point de contact par l'une de ses projections, et nous déterminerons l'autre projection de manière que ce point soit sur la surface donnée.

278. On a vu, n° 147, qu'un plan tangent en un point d'une surface passait par toutes les droites tangentes en ce point aux lignes quelconques situées sur la surface. Or, si parmi ces lignes il y a une droite, cette droite sera elle-même sa tangente; donc elle aura tous ses points compris dans le plan tangent.

279. Nous conclurons de là que lorsqu'une surface est engendrée par

le mouvement d'une droite, comme les surfaces cylindriques, les surfaces coniques, les surfaces gauches et les surfaces développables, le plan tangent en un point de cette surface passe toujours par la position de la génératrice qui correspond à ce point. Cette propriété est d'un usage fréquent, et l'on en va voir l'application dans plusieurs des problèmes qui suivent.

280. *PROBLÈME 1er. On donne une surface cylindrique, on donne la projection horizontale d'un point de cette surface, et l'on demande le plan tangent qui correspond à ce point.*

Pl. 16 Soit ($mnpq$, $m'n'p'$) la directrice de la surface donnée, (ad, $a'd'$) sa génératrice, et g la projection horizontale du point de contact par lequel il faut mener le plan tangent demandé.

Il s'agira d'abord de construire ce point : or, il sera situé sur un élément de la surface, et cet élément aura nécessairement pour projection horizontale la droite gk parallèle à ad. Ce même élément sera donc dans le plan vertical gk, mais ce plan coupe la directrice en (m, m') et (n, n'); donc, si l'on mène par ces points les droites (ng, $n'g'$), (mg, $m'g''$), parallèles à (ad, $a'd'$), l'élément qui contient le point cherché sera l'une de ces droites : donc le point cherché sera l'un des deux points (g, g'), (g, g'').

Ces deux points satisferont également aux données du problème proposé, et ce problème aura conséquemment deux solutions. Comme elles s'obtiennent de la même manière, il nous suffira d'en construire une, celle par exemple qui correspond au point de contact (g, g').

On sait déjà (279) que le plan tangent cherché passe par l'élément (ng, $n'g'$) mené par le point (n, n'), et l'on en conclura que la trace horizontale de ce plan passe par le point k, et sa trace verticale par le point l'.

281. Maintenant, je dis que tout plan tangent en un point d'une surface cylindrique est tangent à cette surface tout le long de l'élément qui passe par ce point; c'est-à-dire que le plan tangent d'une surface cylindrique a une infinité de points de contact qui sont tous les points de l'élément qu'il contient.

En effet, soit S une surface cylindrique quelconque; soit D sa directrice; soit K un point quelconque de la directrice; T la tangente à cette directrice suivant le point K; E l'élément indéfini de la surface S, mené par le point K; et soit enfin P le plan qui passe par l'élément E et par la tangente T. Le plan P sera tangent en K à la surface S (148 et 279); la directrice D et sa tangente T auront un élément linéaire infiniment petit

commun entre elles (89); donc toutes les positions de la génératrice, qui s'appuieront sur cet élément, seront communes à la surface S et au plan P : donc cette surface et ce plan se toucheront suivant une zone infiniment étroite, située le long de l'élément E, et ayant comme cet élément une longueur indéfinie. Mais cette zone ne sera autre chose qu'une suite de facettes de la surface S, situées le long de l'élément E; donc le plan P sera tangent à cette surface suivant tous les points de l'élément E (145) : ce qu'il fallait démontrer. Pl. 16.

282. Il suit de cette propriété que pour avoir le plan tangent demandé, il ne s'agira que de mener par la droite (ng, $n'g'$), un plan tangent en (n, n') à la surface donnée; or ce plan passera par la tangente (ns, $n's'$), menée en (n, n') à la directrice ($mnpq$, $m'n'p'$); cette tangente perce le plan horizontal en s : donc la trace horizontale du plan cherché est la droite ks.

En menant par le point (g, g') une parallèle (gr, $g'r'$) à la trace ks, cette parallèle sera dans le plan demandé, elle percera le plan vertical en un point (r, r'), et la droite $r'l'$, menée par ce point et par le point l', sera la trace verticale du plan tangent cherché (ks, $r'l'$).

283. Nous ferons ici une remarque importante, c'est que les traces ks, $r'l'$, du plan tangent, sont tangentes en k et l' aux traces $akcb$, $d'l'tu$, de la surface donnée. En effet, ce plan est tangent en (k, k') et (l, l'), à cette surface (281); donc il passe par les tangentes menées par ces points aux courbes planes $akcb$, $d'l'tu$ (147) : mais ces tangentes sont situées dans les plans de projection; donc elles coïncident avec les traces respectives ks et $r'l'$.

Nous conclurons de là que lorsqu'on sait mener une droite tangente en un point (n, n') de la directrice d'un cylindre, on sait aussi mener des tangentes ks, $l'r'$, aux traces de ce cylindre, par les points (k, k'), (l, l'), où l'élément qui passe par le point (n, n') perce les plans de projection.

284. Si la directrice de la surface donnée était dans le plan horizontal, ce qui arrive très communément, cette directrice et la trace abc ne feraient qu'une seule et même courbe, et le plan tangent se construirait avec beaucoup de facilité; car ayant déterminé l'élément (gk, $g'k'$), qui contient le point de contact, il ne s'agirait que de mener par le point k, où cet élément rencontre la directrice, une tangente ks à cette directrice, pour avoir la trace horizontale du plan cherché, et par suite ce plan.

Pl. 16. 285. *Exécution de l'épure.* Le cylindre donné est représenté par ses traces *abc*, *d'l'tu*; par les élémens qui, en projection horizontale et en projection verticale, enferment les projections du cylindre, et par sa directrice (166). On a supposé que cette directrice était une droite en projection verticale et un cercle en projection horizontale, et la projection *g* du point de contact a été choisie de façon que le plan demandé (*ks*, *r'l'*), soit au-dessous et en arrière du cylindre; en sorte que ce cylindre doit être représenté comme s'il était seul dans l'espace.

D'après cela, tous les points de la droite *vx* correspondant chacun à deux points de la courbe (*mnpq*, *m'n'p'*), dont l'un est nécessairement vu en projection verticale, la ligne *vx* doit être pleine. La projection horizontale *mnpq* de la même courbe est formée de deux parties, l'une pleine, parce qu'elle correspond à la partie supérieure de la surface, et l'autre ponctuée, parce qu'elle correspond à sa partie inférieure. Quant aux traces et aux élémens, il est facile, d'après ce qu'on a vu (170—175), de déterminer leurs parties pleines et ponctuées.

Le plan (*ks*, *r'l'*) étant situé au-dessous et en arrière du cylindre donné, les traces *ks*, *r'l'*, doivent être ponctuées dans les parties où elles traversent les projections de ce cylindre, et pleines dans les autres parties.

286. PROBLÈME 2. *Mener par un point donné d'une surface conique un plan tangent à cette surface.*

Supposons que l'on mène une ligne droite par le point donné et par le sommet du cône; cette droite sera l'un des élémens de la surface, et d'après ce qu'on a vu n° 279, cet élément tout entier sera compris dans le plan tangent demandé.

287. Or, je dis que ce plan sera tangent au cône tout le long de cet élément; en effet, désignons ce même élément par la lettre E, la directrice par la lettre D, et le plan tangent demandé par la lettre P. L'élément E et la directrice D se coupent en un point K, et si l'on imagine par ce point une droite T, tangente à la directrice D, les lignes T et D auront un élément linéaire infiniment petit *k* commun entre elles. Cela posé, concevons que la génératrice se meuve pour engendrer le cône; il est clair que toutes les positions de cette génératrice, qui s'appuieront sur l'élément *k*, seront à la fois dans la surface donnée et dans le plan tangent P : mais toutes ces positions formeront évidemment une petite zone du plan P, laquelle comprendra l'élément E, et qui sera composée de toutes les facettes de la surface traver-

sées par cet élément ; donc le plan P (145) sera tangent au cône suivant tous Pl. 17.
les points de l'élément E.

288. Soit donc (s, s') le sommet du cône donné, $(mrnt, m'r'n')$ sa directrice, (n, n') un point de cette directrice, et $(sn, s'n')$ l'élément de la surface mené par le point de contact donné.

Par le point (n, n'), où l'élément $(sn, s'n')$ s'appuie sur la directrice, on menera la droite $(nu, n'u')$, tangente à la courbe $(mrnt, m'r'n')$; cette droite sera dans le plan tangent en (n, n') à la surface donnée (147), ou, ce qui revient au même, elle sera dans le plan tangent à cette surface tout le long de $(sn, s'n')$, c'est-à-dire dans le plan tangent demandé : donc ce plan passera par les droites $(ns, n's')$, $(nu, n'u')$.

Ces droites étant connues, il sera facile d'en déduire les traces hg, gv', de ce plan. Parmi les différens moyens que l'on pourra employer pour les obtenir, voici celui qui est indiqué sur l'épure. On a mené par le sommet (s, s'), la droite $(sv, s'v')$ parallèle à la tangente $(nu, n'u')$; on a déterminé les points u' et v' où ces deux droites $(sv, s'v')$, $(nu, n'u')$, percent le plan vertical, et comme elles sont dans le plan demandé, on en a déduit la trace $u'v'$ de ce plan : on a prolongé cette trace jusqu'au point g où elle coupe la ligne de terre; par ce point et par le point o, où l'élément $(sn, s'n')$ perce le plan horizontal, on a mené la droite gh, et l'on a eu le plan cherché (gh, gv').

289. Si l'on donnait la projection horizontale d'un point du cône, et qu'on demandât le plan tangent en ce point, il faudrait d'abord chercher l'élément passant par le point donné, et le problème se trouverait ramené à celui que nous venons de résoudre. Or, dans le cas de l'épure, le cône a deux points qui ont même projection horizontale p; donc il y a deux élémens qui correspondent à ce point. Pour trouver ces élémens, on menera la droite sp; on imaginera par cette droite un plan vertical; il coupera la directrice $(mrnt, m'r'n')$ en deux points; on construira ces points; on menera par le sommet (s, s') et par ces mêmes points deux lignes droites, et ces lignes seront les élémens cherchés.

290. Le plan (gh, gv') touchant la surface donnée tout le long de l'élément indéfini $(sn, s'n')$, il en résulte que si l'on mène un plan quelconque dans l'espace, ce plan coupera la droite $(sn, s'n')$ en un point, la surface conique suivant une courbe passant par ce point, et le plan (gh, gv') suivant une droite tangente à cette courbe en ce même point : car la tangente

Pl. 17. devant être à la fois dans le plan tangent et dans le plan de la courbe, elle est nécessairement l'intersection de ces plans.

Si l'on prend les plans de projection pour exemples, on verra que les droites gh, gv', sont tangentes aux traces de la surface donnée, et que le point de contact de la première de ces droites est la trace horizontale o de (sn, $s'n'$). Quant au point de contact de la seconde, il est visible qu'il est situé hors du cadre, ainsi que la trace verticale de la surface donnée.

291. *Exécution de l'épure.* Le cône est représenté par les projections s et s' de son sommet, par sa trace horizontale, par plusieurs positions de sa génératrice, parmi lesquelles on doit remarquer celles qui servent de contours aux deux projections du cône, et enfin par les projections de la directrice (185).

On suppose la nappe inférieure terminée au plan horizontal : elle est évidemment au-dessus du plan tangent et en arrière de ce plan. La nappe supérieure est prolongée indéfiniment; elle est évidemment au-dessus du plan tangent et en avant de ce plan. D'après cela, la nappe supérieure du cône n'est pas vue en projection horizontale; donc toutes les lignes qui la représentent doivent être ponctuées, hors l'élément de contact sx, qui est dans le plan tangent, et qui par conséquent ne peut être caché par ce plan. Il en est de même de la nappe inférieure en projection verticale; toutes les lignes qui lui appartiennent sont conséquemment ponctuées, hors l'élément de contact $s'o'$.

Quant aux nappes situées au-dessus ou en avant du plan tangent, voyez les n°s 170 et 190.

Il ne reste à parler que des traces gh, gv', de ce plan : or, il est clair que la première est cachée par la nappe inférieure du cône, et la dernière par sa nappe supérieure; donc les parties de ces traces comprises dans les angles csd, $qs'q'$, doivent être ponctuées, et le surplus des mêmes traces, jusqu'à la ligne de terre, doit être marqué par des lignes pleines.

Pl. 18 Fig. 1. 292. PROBLÈME 3. *Étant donnés l'axe* (I, I'I'') *et la méridienne principale* (VN, V'LM'N'M''L') *d'une surface de révolution, mener un plan tangent à cette surface par un de ses points dont la projection horizontale* P *soit connue.*

Il s'agira d'abord de déterminer la projection verticale du point de contact. Et comme la méridienne est composée de deux parties (VN, V'LN'), (VN, V'L'N'), qui ont même projection horizontale, et qui sont situées

l'une au-dessus de l'autre, il est évident que la surface donnée est aussi composée de deux parties qui ont même projection, et qui contiennent chacune un point projeté en P; d'où il suit qu'il y a deux points de contact correspondans aux données du problème. Pl. 18. Fig. 1.

Pour les déterminer, on remarquera qu'ils sont situés sur la verticale (P, pp'), laquelle est tout entière comprise dans le plan méridien OY. Or, amenons ce plan sur VN, en le faisant tourner autour de l'axe (I, I'I''); le pied P de la verticale (P, pp') décrira l'arc de cercle PM, dont le centre est en I, et cette verticale viendra par conséquent en (M, mm'). Mais la méridienne OY viendra coïncider avec (VN, V'LN'L'); d'où l'on voit que les points (M, M'), (M, M''), seront communs à la verticale et à la méridienne amenées dans le plan VN. Faisons donc tourner ces points autour de l'axe (I, I'I'') pour les ramener dans le plan OY : ils ne sortiront pas des plans horizontaux qui les contiennent; donc, à leur retour dans leurs positions primitives, ils auront leurs projections verticales sur les droites M'P', M''P'', menées par les points M'' et M' parallèlement à la ligne de terre; donc ces projections seront en P' et P'', car elles doivent être sur la ligne Pp' : donc enfin les points (P, P'), (P, P''), seront les points cherchés.

293. Supposons que ce soit par le premier (P, P') de ces points qu'il s'agisse de mener le plan tangent demandé.

Ce plan passera, premièrement, par la tangente en (P, P') à la méridienne OY; secondement, par la tangente au même point au cercle horizontal (UXMP, U'M').

Menons cette dernière tangente. Il est clair qu'elle sera horizontale; donc elle aura pour projection verticale la droite U'P'M' parallèle à la ligne de terre. Quant à sa projection horizontale, ce sera évidemment la tangente PS au cercle UXMP. La tangente cherchée sera donc la droite horizontale (PS, P'U'), laquelle perce le plan vertical au point S'; et puisque cette tangente est dans le plan demandé, la trace verticale de ce plan passera par le point S'. De plus il coupera le plan horizontal suivant une parallèle à la droite (PS, P'U'), suivant laquelle il coupe le plan horizontal U'M'; donc sa trace horizontale sera une droite parallèle à PS.

Pour construire cette droite, il nous suffira d'en avoir un point : ce point va nous être fourni par la tangente en (P, P') à la méridienne OY. Amenons cette méridienne dans le plan VN, en la faisant tourner sur l'axe (I, I'I''); elle viendra se placer en (VN, V'LN'L'), et le point (P, P') en (M, M'). La tangente en (P, P'), amenée dans le plan VN, sera donc la droite (MQ,

Pl. 18. Fig. 1. M'Q'), tangente en (M, M') à la méridienne principale VN. Cette tangente perce le plan horizontal au point (Q, Q'), qui, ramené dans le plan OY, vient se placer en R, sur l'arc de cercle QR, décrit du point I comme centre avec le rayon IQ. Le point R est donc celui où la tangente en (P, P') à la méridienne perce le plan horizontal : cette tangente est dans le plan demandé; donc le point R appartient à la trace horizontale de ce plan.

Donc si nous menons par le point R la droite RT, parallèle à PS, puis par le point T, où RT coupe la ligne de terre, la droite TS', passant par le point S', le plan (RT, TS') sera le plan tangent cherché.

294. Nous ferons faire en passant une remarque importante : c'est que le plan tangent en un point (P, P') d'une surface quelconque de révolution, est toujours perpendiculaire au plan méridien IP correspondant à ce point. En effet, le plan tangent contient la droite (PS, P'U'), tangente en (P, P') au cercle (UXMP, U'M') de la surface; or, cette droite est perpendiculaire au plan IP; donc, etc. Cette propriété s'énonce ordinairement ainsi : *Le plan tangent est perpendiculaire au plan méridien correspondant.*

Elle conduit aisément à la détermination du plan tangent, car ayant le point de contact et connaissant la tangente en ce point à la génératrice ou à la méridienne, le plan mené par cette tangente, perpendiculairement au plan méridien, sera le plan tangent cherché.

On voit aussi que l'axe de révolution étant supposé vertical, la trace horizontale du plan tangent sera toujours perpendiculaire à celle du plan méridien.

Enfin, il est évident que si par une tangente quelconque à une surface de révolution, on mène un plan perpendiculaire au plan méridien passant par le point de contact de cette tangente, le plan mené sera tangent à la surface.

295. *Exécution de l'épure.* Le plan demandé (RT, TS') étant situé au-dessous et en arrière de la surface donnée, il en résulte que les contours des projections de cette surface sont vus. Quant aux traces RT, TS', elles sont vues aussi, sauf les parties comprises dans l'intérieur des lignes VONY, V'LN'L'.

Fig. 2. 296. *Problème* 4. *Étant donnés l'axe* (I, I'I') *d'une surface de révolution, et une ligne quelconque* (OMN, O'M'N') *qui en soit la génératrice, mener un plan tangent à cette surface par un de ses points dont la projection horizontale* P *soit connue.*

Déterminons d'abord la seconde projection de ce point. Pour cela nous

décrirons du point I comme centre, avec le rayon IP, un cercle PmM; il rencontrera la courbe OMN en des points M et m; et il est clair que dans la génération de la surface, les points (M, M′), (m, m'), de (OMN, O′M′N′), décriront des cercles horizontaux (MmP, M′P′), (MmP, m'P″), qui auront des points (P, P′), (P, P″), situés dans la verticale P : d'où il suit que le point de contact donné sera l'un de ces points. Pl. 18. Fig. 2.

Contentons-nous d'opérer sur le premier (P, P′).

297. Ce point, ramené sur la génératrice, étant en (M, M′), nous mènerons, par les points M et M′, les tangentes MT, M′T′, aux lignes OMN, O′M′N′, et nous aurons la tangente (MT, M′T′) à la courbe (OMN, O′M′N′). Cette tangente percera le plan horizontal en un point (T, T′); et si nous imaginons qu'elle se meuve en même temps que la courbe (OMN, O′M′N′) autour de l'axe (I, I′I″), on verra que dans ce mouvement le point (T, T′) décrit un cercle TKRtk, et qu'il est toujours en arrière du méridien IK, correspondant au point (M, M′), d'une portion TK de la circonférence TKRtk. Donc, lorsque le point (M, M′) sera en (P, P′), le point T sera au point t, éloigné du méridien Ik, mené par le point P, d'une grandeur circulaire tk mesurée sur le cercle TKRtk et égale à TK.

Donc la tangente analogue à (MT, M′T′), menée par le point (P, P′) à la position de la génératrice qui passe par ce point, perce le plan horizontal en t. Mais cette tangente est située dans le plan tangent demandé; donc la trace horizontale de ce plan passe par le point t. Et comme le plan tangent est perpendiculaire au plan méridien (294), cette trace sera la droite tr menée par le point t perpendiculairement à Ik.

Maintenant, menons par le point (P, P′) une horizontale (Ps, P′s'), parallèle à tr : cette horizontale sera dans le plan tangent; or elle percera le plan vertical en s'; donc la droite rs' sera la trace verticale du plan cherché. Donc enfin (tr, rs') sera ce plan.

298. Dans le problème précédent, nous avons déduit le plan tangent de la tangente à la méridienne : celui-ci nous donne le moyen de déduire cette tangente du plan tangent, car elle est l'intersection de ce plan et du plan méridien (152). Si donc on veut avoir la tangente au point (P, P′) de la méridienne IP, on menera le plan (tr, rs'), tangent en (P, P′) à la surface donnée; ce plan coupera le plan méridien IP suivant la droite qui passe par les points u et (P, P′), et cette droite sera la tangente cherchée. Il est clair que si l'on amène la méridienne IP dans le plan Iz, parallèle au plan vertical, le point u venant se placer en (z, z'), et le point (P, P′) en (n, n'), la

Pl. 18. Fig. 2. tangente à la méridienne principale (Iz, $xn'y$), au point (n, n') correspondant à (P, P'), sera la droite (zI, $z'n'$).

299. *Exécution de l'épure.* Pour ne pas nous jeter dans des difficultés étrangères à l'objet principal, difficultés qui seront traitées avec détail dans les problèmes suivans, nous nous sommes abstenus de représenter la surface donnée, et nous avons supposé que le plan demandé (tr, rs') n'existait pas dans l'espace. Il suit de là que les traces de ce plan doivent être indiquées en lignes mixtes (56), et que la figure ne doit pas présenter d'autres lignes pleines que les projections I'I", OMN, O'M'N', de l'axe et de la génératrice.

300. PROBLÈME 5. *Mener un plan tangent à la surface de révolution dont la génératrice est le cercle vertical* (AC, A'B'C'B"), *et dont l'axe de révolution est la verticale* (I, I'I") *située dans le plan* AC.

Pl. 19. Le point de contact (i, i') ayant été choisi arbitrairement sur un cercle quelconque (DEFK, D'F') de la surface donnée, le plan tangent demandé s'obtiendra absolument comme dans le problème du n° 292. Ainsi, on amenera le point (i, i') en (D, D') dans le méridien principal; on menera la tangente D'G'; on construira le point G où elle perce le plan horizontal; on ramenera ce point en H dans le méridien IH du point de contact, et la trace horizontale du plan cherché sera la droite HK, menée par le point H perpendiculairement à IH. Pour avoir sa trace verticale, on menera par le point (i, i') la droite (ir, $i'r'$) parallèle à HK; elle percera le plan vertical en (r, r'); on menera la droite Kr', et le plan (HK, Kr') sera le plan tangent demandé.

301. Notre objet, en construisant ce plan, était de donner un exemple des plans tangens aux surfaces non convexes. La surface donnée, qui est ce qu'on nomme une surface *annullaire*, ou en forme d'anneau, est évidemment non convexe dans toute la partie interne engendrée par le demi-cercle (AB, B'A'B")); et il est manifeste que le plan obtenu, ainsi que tous les plans tangens aux points de cette partie, est dans le cas du plan tangent G'D', qui est tout-à-la-fois plan tangent et plan coupant. Ce qui va suivre, où l'on trouvera des détails utiles sur le dessin d'une épure complète, achevera de donner une idée bien claire des plans tangens aux surfaces non convexes.

302. *Exécution de l'épure.* Nous supposerons que le plan tangent (HK, Kr') soit terminé, d'une part, au plan horizontal Z'Y', et, d'autre part, au plan vertical WZ. Il s'ensuit qu'il sera projeté horizontalement entre les droites HK, YZ; et verticalement entre KY' et Z'W'.

Cela posé, on remarquera que la droite (YZ, Y'Z') étant au-dessus de la surface donnée, tandis que la droite (HK, KG') est au-dessous, cette surface passe, entre ces deux droites, du dessus au-dessous du plan tangent. De même en projection verticale, la droite (WZ, W'Z') étant en avant de la même surface, et la droite KY' en arrière, cette surface, entre ces deux droites, se trouve d'un côté en avant, et de l'autre côté en arrière, du plan (HK, Kr'). Pour connaître les parties vues et cachées des grandeurs à représenter,

savoir le plan demandé et la surface annullaire donnée, il faut donc déterminer leur intersection commune. Pl. 19.

303. Ramenons le plan méridien IH en IG ; et supposons qu'il emmène avec lui le plan tangent (HK, Kr') : ce dernier plan viendra prendre la position G'D', et l'intersection cherchée se trouvera projetée en *yz*. Il ne s'agira donc plus que de ramener cette intersection dans la position correspondante au plan méridien IH, ce qui sera très facile. Considérons les points qui sont situés dans le plan LL' : l'intersection étant en *yz*, ces points sont sur la droite (*mm'*, M'), intersection des plans G'D', LL'. Or, lorsque le plan IG se meut pour venir en IH, le point M vient en *n*, et la droite (*mm'*, M'), sans sortir du plan LL', vient prendre la position (*onv*, LL'). Mais les points dont nous nous occupons sont situés sur les cercles (*lol'v*, LL'), (*eec'u*, NN'); ramenés dans leur position primitive ils sont sur la droite (*onv*, LL') : donc ce sont les points (*o*, *o'*), (*e*, *e'*), (*u*, *u'*) et (*v*, *v'*).

De nouvelles constructions, faites sur d'autres plans, tels que LL', donneront de nouveaux points, et en joignant par une courbe ceux qui se feront suite sur une même projection, on obtiendra l'intersection cherchée (*i*RoP*ei*T*t*Q*u*, *i'*R'*o'*P'*e'i'*T'*v'*Q'*u'*).

Au moyen de cette intersection, il sera aisé d'avoir les parties vues et cachées de l'épure.

304. Examinons d'abord la projection horizontale. Il est clair que l'intersection (*i*RoP..., *i'*R'*o'*P'...) sera vue dans toutes ses parties supérieures au plan *h'*C', et cachée dans toutes les autres; d'où l'on voit que les arcs SP*s*, VQU, correspondans aux courbes (SP*s*, S'P'*s'*), (VQU, V'Q'U'), situées sur le dessus de la surface, devront être pleins, et que les projections horizontales SR*i*U, VT*is*, des courbes (SR*i*U, S'R'*i'*U'), (VT*is*, V'T'*i's'*), situées sur le dessous de la surface, devront être ponctuées.

Maintenant, on remarquera qu'un cercle quelconque (*ol'vl*, LL'), qui serait vu sur la surface annullaire, si elle était isolée dans l'espace, ne sera pas caché à droite de la ligne ZY ; qu'il passera sous le plan tangent à partir de cette ligne, et qu'il sortira de dessous le même plan aux points (*o*, *o'*), (*v*, *v'*), où il rencontrera l'intersection (*i*RoP..., *i'*R'*o'*P'...), en sorte qu'il ne devra avoir de ponctués que les seuls arcs *og* et *va*. Il en sera de même de tout autre cercle (*cec'u*, NN').

Quant au plan tangent, sa trace horizontale ne devra être ponctuée que dans la traverse du cercle SCV.

305. En projection verticale, la seule portion de surface vue sera celle qu'engendre l'arc (BC, B'C'B") de la génératrice, lorsqu'il se meut en avant du plan *h*C. La courbe (*i*RoP..., *i'*R'*o'*P'...) aura donc l'arc R'*i'u'*Q'*v'*T'*i'e'*P', de sa projection verticale, entièrement ponctué, et son arc P'*o'*S'R' sera plein, parce qu'il correspond à la portion de cette courbe située sur la partie externe et antérieure de l'anneau.

Un demi-cercle (*lol'*, LL'), situé sur cette même partie de surface, sera vu à gauche de la ligne W'Z' ; il passera sous le plan tangent à partir de cette ligne ; il en sortira au point *o'*, pour être vu jusqu'en L', de sorte qu'il ne devra être ponctué que de *d* en *o'*.

Les cercles (RPBT, R'B'), (RPBT, R"B"), étant, le premier, le plus élevé de la surface, et le second, le moins élevé, les droites R'B', R"B", appartiendront au contour de la projection verticale de cette surface; et l'intervalle compris entre ces droites sera

Pl. 19. fermé par les deux demi-cercles R′h′R″, B′C′B″. Depuis la courbe P′o′S′R′ jusqu'à la ligne W′Z′, ces contours se trouveront cachés par le plan (HK, Kr′).

Nous ferons observer que si la partie interne de la surface annullaire existait seule dans l'espace, les deux droites R′B′, R″B″, et les deux demi-cercles R′bR″, B′A′B″, formeraient le contour de sa projection verticale. Ces deux demi-cercles appartiennent en conséquence au contour, considéré d'une manière générale (387) : comme ils ne sont pas vus, ils sont indiqués par des points.

Enfin, il est évident que la trace verticale Kr′ du plan tangent sera cachée dans tout l'espace compris entre les lignes R′B′, R″B″.

Pl. 20. Fig. 1. 306. *Problème* 6. *Mener, par un point donné d'un hyperboloïde de révolution à une nappe, un plan tangent à cette surface.*

Soit (I, I′I″) l'axe de révolution, (GH, G′H′) une position quelconque de la génératrice, et prenons arbitrairement pour point de contact un point (s, s′) de (GH, G′H′).

Le plan tangent en ce point passera par l'élément (GH, G′H′), et sera perpendiculaire au méridien IS; d'où l'on voit qu'il aura pour trace horizontale la droite GK, menée par le point G perpendiculairement à IS. Quant à sa trace verticale, il serait facile de la construire; mais comme elle est hors de l'épure nous ne nous en occuperons pas.

307. Supposons qu'au lieu du point (s, s′) on ait choisi, sur (GH, G′H′), le point (t, t′) pour point de contact : le plan tangent aurait été perpendiculaire au plan méridien IT, et il aurait eu pour trace horizontale la droite GL perpendiculaire à IT et passant par le point G. Il suit de-là que si l'on fait mouvoir le point de contact sur un élément quelconque (GH, G′H′), le plan méridien du point mobile changeant à chaque instant, il y aura, pour chaque position de ce point, un plan tangent particulier.

308. Ce résultat est fort simple et fort exact; cependant il paraît d'ordinaire paradoxal aux commençans. Ils s'imaginent que parce qu'une surface gauche a pour génératrice une droite, comme les surfaces coniques et cylindriques, le plan tangent en un point d'un élément d'une surface gauche, doit jouir de la propriété de toucher cette surface tout le long de cet élément. Mais cette propriété générale appartient exclusivement aux surfaces développables, et c'est une erreur que de l'appliquer aux surfaces gauches.

Cette erreur provient de ce qu'on ne se rend pas toujours bien compte de la définition de ces dernières surfaces (214) : effectivement il est évi-

dent que puisque deux positions consécutives de leur génératrice ne sont pas en général dans un même plan, les facettes qui joignent ces positions sont des élémens plans dont l'inclinaison varie d'une facette à sa voisine, en sorte que les plans tangens, suivant les points d'une même position de la génératrice, ont cette position pour intersection commune, mais diffèrent d'ailleurs les uns des autres. Pl. 20. Fig. 1

309. Avant de terminer cette digression, menons par le point *s* la droite K*sn*, tangente en *n* au cercle (*nac*, *n'a'c'*), qui correspond au point (*a*, *a'*) de l'élément (GH, G'H'), et qui forme la gorge de l'hyperboloïde (238); rapportons les points K et *n* des cercles décrits par les points (G, G'), (*a*, *a'*), de (GH, G'H'), en K' et *n'* sur la projection verticale, et menons K'*s'n'*. On sait que la droite (K*sn*, K'*s'n'*) sera un élément de la seconde génération de la surface (239) : or, cet élément et l'élément (GH, G'H') seront symétriques entre eux par rapport au plan méridien IS; d'où il suit que le plan tangent en (*s*, *s'*) les contiendra tous deux. Ces élémens sont effectivement deux sections de l'hyperboloïde; elles sont elles-mêmes leurs tangentes : donc elles doivent être toutes deux contenues dans le plan tangent (147).

310. Ce qui précède confirme, pour le cas des hyperboloïdes de révolution à une nappe, le théorème du n° 243; car si l'on fait mouvoir un plan autour d'un élément quelconque (GH, G'H'), sa trace horizontale GK étant toujours perpendiculaire à un certain plan méridien I*s*S, il coupera toujours le cercle (GKF, G'F') en un second point (K, K'), auquel correspondra un élément (K*s*, K'*s'*) de la seconde génération contenu dans le plan mobile, et, conséquemment, ce plan touchera toujours l'hyperboloïde.

En suivant ce même plan dans son mouvement, on verra que le point de contact (*s*, *s'*) parcourt l'élément (GH, G'H') tout entier, depuis l'infini au-dessous du plan horizontal jusqu'à l'infini au-dessus.

311. Enfin, on remarquera que tout plan tangent aux surfaces qui nous occupent passant par deux élémens (G*s*, G'*s'*), (K*s*, K'*s'*), ce plan a nécessairement pour trace horizontale une corde GK du cercle GKFM; d'où il suit que le plan tangent coupe l'hyperboloïde, et que cette surface, comme on le savait déjà (247), est dans toutes ses parties une surface non convexe.

312. *Exécution de l'épure.* Nous avons supposé que le plan demandé était terminé par le plan horizontal B'C', et par les plans verticaux AB, CD, parallèles à IS; d'après cela il a pour projections, d'une part, le rectangle ABCD, d'autre part, le parallélogramme A'B'C'D'.

La surface donnée est terminée aussi au plan horizontal B'C', et pour

Pl. 20. Fig. 1. qu'elle soit représentée complètement, nous avons construit (200) les deux branches (evx, $e'v'x'$), (Fco, $F'c'o'$), de la méridienne principale.

A la simple inspection, on voit que le plan tangent (ABCD, A'B'C'D') passe au-dessous et au-delà de toute la portion de surface située entre les élémens (GH, G'H'), (KP, K'P'); ainsi cette portion de surface doit être vue, sauf les parties où elle se cache elle-même.

313. En projection horizontale, la zône comprise entre les cercles (xQHoR, $x'o'$), ($vach$, $v'c'$), laquelle se projette sur le plan vertical en $x'v'c'o'$, cache celle qui est immédiatement au-dessous, en sorte que les parties (pQqs, $p'q's'$), ($snas$, $s'n'a'$), des triangles (GsK, G's'K'), (sPH, s'P'H'), se trouvent cachées : les élémens (GH, G'H'), (KP, K'P'), quoique situés dans le plan tangent, sont en conséquence ponctués de p en a et de q en n. Au-dehors du rectangle ABCD, le plan tangent ne cache plus aucune partie de l'hyperboloïde; il est donc vu, sauf la partie cachée par la zône supérieure au cercle ($vach$, $v'c'$) de la gorge.

D'après cela, une section horizontale ($ytgd$, $y'g'$), si elle est au-dessus de ce cercle, ne devra être ponctuée que suivant les petits arcs qui traversent le triangle sPH. Et si cette section est au-dessous du cercle ($vach$, $v'c'$), comme celle ($rkmb$, $r'm'$), elle sera vue dans l'angle GsK et au-dehors du rectangle ABCD.

Pour le plan tangent, la partie GK de sa trace étant dans l'intérieur de l'hyperboloïde, elle doit être ponctuée.

314. La projection verticale présentera moins de difficulté. D'abord toutes les parties de l'hyperboloïde situées au-dehors du parallélogramme A'B'C'D', ne seront pas cachées par le plan tangent, et parmi celles qui se trouvent projetées dans ce parallélogramme, les portions comprises entre les élémens (GH, G'H'), (KP, K'P') devront être considérées abstraction faite de ce plan, puisqu'elles sont en avant de sa surface (158).

S'il s'agit donc du cercle $r'm'$, il sera vu dans l'angle G's'K'; et s'il s'agit du cercle ($ytgd$, $y'g'$), il ne sera caché par le plan tangent (en projection verticale) que suivant l'arc $zdgw$; donc il sera vu de y' en w'.

Fig. 2. 315. *Problème* 7. *Soient* (AB, A'B'), (CD, C'D') *les deux droites directrices d'un paraboloïde hyperbolique; supposons que le plan vertical serve de plan directeur, et le point* (o, o') *ayant été pris arbitrairement*

sur un élément quelconque (MN, M'N') (*), *proposons-nous de mener un plan tangent par ce point.* Pl. 20. Fig. 2

On remarquera que la paraboloïde hyperbolique étant susceptible d'être engendrée de deux manières par une droite (224), la surface donnée à un second élément indéfini qui passe par le point (o, o'), et que cet élément et l'élément (MN, M'N'), étant eux-mêmes leurs tangentes (278), ils sont l'un et l'autre compris dans le plan tangent : d'où il suit que le plan demandé est celui que ces élémens déterminent.

Construisons donc l'élément de la seconde génération correspondant au point (o, o'). Pour cela nous menerons d'abord un plan PQ parallèle au plan directeur : il coupera les directrices (AB, A'B'), (CD, C'D') en deux points (P, P'), (Q, Q'), et la droite (PQ, P'Q') sera un second élément de la première génération. Prenons les élémens (MN, M'N'), (PQ, P'Q'), pour diriger la seconde génératrice. Nous savons (225) que le plan directeur de cette génération sera parallèle aux deux premières directrices. Si donc nous menons par le point (o, o') les droites (ob, $o'b'$), (oc, $o'c'$), respectivement parallèles à (AB, A'B'), (CD, C'D'), ces droites détermineront un plan parallèle au plan directeur de la seconde génération; donc il contiendra l'élément cherché. Mais le plan PQ contient un point de cet élément, puisque ce même élément s'appuie sur (PQ, P'Q'); donc ce point est sur l'intersection du plan PQ et du plan que déterminent les droites (ob, $o'b'$), (oc, $o'c'$). De plus, il est évidemment le point où se rencontrent cette intersection et l'élément (PQ, P'Q').

Or, les droites (ob, $o'b'$), (oc, $o'c'$) percent le plan horizontal en b et c; donc bc est la trace du plan, parallèle aux deux premières directrices, mené par le point (o, o'). Menons par ce point la droite (ot, $o't'$), parallèle à bc; elle percera le plan PQ en (t, t') : bc le perce en (r, r'); donc la droite (rt, $r't'$) sera l'intersection du plan PQ et du plan mené par (o, o') parallèlement aux deux premières directrices. Cette intersection coupe en (v, v') l'élément (PQ, P'Q'); donc le point (v, v') est celui où l'élément cherché touche la droite (PQ, P'Q') : donc enfin cet élément est la droite (ov, $o'v'$), menée par les points (o, o') et (v, v').

Si par les droites (MN, M'N'), (ov, $o'v'$) on mène un plan, il sera donc

(*) L'élément (MN, M'N') a été préalablement construit comme on va construire tout à l'heure l'élément (PQ, P'Q').

Pl. 20. Fig. 2. le plan demandé. Pour ne pas compliquer la figure, nous nous abstiendrons de faire les constructions nécessaires pour obtenir ses traces.

316. *Exécution de l'épure.* On a représenté la portion de surface comprise dans le trapèze ABDC. Il est clair qu'elle est entièrement vue en projection horizontale. Quant à la projection verticale, il est évident que l'élément (AC, A'C') étant en deçà de tous les autres, il est vu dans toute son étendue; et que tout autre élément P'Q' doit être ponctué depuis le point où il rencontre A'C', jusqu'à celui où il touche le contour *mxn* de la projection du paraboloïde.

Le problème suivant, où la même question est traitée d'une manière plus générale, contient des détails que nous avons cru devoir épargner aux commençans.

Pl. 21. Fig. 1. 317. PROBLÈME 8. *Soient* (BH, *bh*), (B'H', *b'h'*) *les deux droites directrices d'un paraboloïde hyperboloïde* (*), *et* GG', *gg'*, *les traces de son plan directeur : imaginons qu'on ait coupé les directrices par un plan parallèle au plan* (GG', *gg'*); *que par les points d'intersection* (A, *a*), (C, *c*), *on ait mené l'élément* (AC, *ac*) *du paraboloïde, et soit* (K, *k*) *un point de cet élément : on demande le plan tangent en ce point.*

D'après ce qu'on vient de voir dans le problème précédent, le plan demandé sera celui des deux élémens qui appartiennent aux deux générations de la surface donnée, et qui se croisent au point (K, *k*).

318. Cherchons donc l'élément de la seconde génération qui passe par ce point. Pour cela, il faudra d'abord avoir deux élémens de la première génération que l'on puisse employer comme directrices de la seconde; mais nous avons déjà l'élément donné (AC, *ac*); ainsi il ne nous en restera qu'un à construire. Déterminons celui qui passe par le point (S, *s*) de la directrice donnée (BH, *bh*). Cet élément sera dans le plan mené par le point (S, *s*), parallèlement au plan directeur; il s'appuiera sur la seconde directrice (B'H', *b'h'*); donc il passera par le point où cette seconde directrice est coupée par le plan mené par le point (S, *s*) parallèlement au plan directeur. D'après cela, on va voir qu'il sera facile de le trouver. En effet, on coupera le plan directeur (GG', *gg'*) par deux plans verticaux quelconques DE, DF; on construira les droites d'intersection (DE, *de*), (DF, *df*); on menera par le point (S, *s*) des parallèles (SU, *su*), (ST, *st*) à ces droites, et ces parallèles détermineront un plan parallèle au plan directeur. La première (SU, *su*) percera le plan projetant B'H' de la seconde directrice au point (U, *u*); la deuxième (ST, *st*) percera ce même plan en (T, *t*) : on menera par les points *u* et *t* la droite *ut*; elle rencontrera la projection verticale *h'b'*, de la deuxième directrice, au point *v*; on mettra ce point en projection horizontale en V, et la droite (SV, *sv*) sera l'élément cherché : car il est clair que la ligne (TU, *tu*) sera l'intersection du plan B'H' et du plan

(*) Les lettres B, *b*, B', *b'* et H, *h*, H', *h'*, sont placées sur l'épure, de manière que les premières répondent aux extrémités inférieures des directrices, et les dernières, aux extrémités supérieures : ce sont les initiales des mots *basse* et *haute*.

parallèle au plan directeur ; d'où l'on voit que le point (V, v) sera dans ce plan parallèle, et comme il est sur la seconde directrice, il s'ensuit qu'il appartient à l'élément cherché. Donc, etc. Pl. 21. Fig. 1.

Connaissant maintenant deux élémens (AC, ac), (SV, sv) de la première génération, il faudra les prendre pour directrices de la seconde, et chercher l'élément de cette seconde génération qui passe par le point (K, k).

Nous nous rappellerons d'abord que le plan directeur de la seconde génération est parallèle aux deux premières directrices (225), et nous en conclurons que si l'on mène par le point (K, k) les droites (KL, kl), (KM, km), respectivement parallèles aux directrices données (BH, bh), (B'H', $b'h'$), le plan de ces droites sera parallèle au plan directeur de la seconde génération; donc il contiendra l'élément à construire. Or, les droites (KL, kl), (KM, km) percent le plan projetant SV, de la directrice (SV, sv), suivant les points (L, l), (M, m), qui appartiennent à l'intersection (ML, ml) du plan projetant SV et du plan parallèle au plan directeur; donc la droite (ML, ml) contient le point où l'élément à construire s'appuie sur (SV, sv); donc ce point a pour projection verticale le point n; donc, si l'on détermine sa projection horizontale N et que l'on mène (KN, kn), cette droite sera l'élément de la seconde génération correspondant au point donné (K, k).

319. L'élément donné de la première génération perce en P le plan horizontal; l'élément construit (KN, kn) perce le plan vertical en X et le plan horizontal en Q : donc les droites PQR, XRY, sont les traces du plan tangent demandé.

320. *Exécution de l'épure*. On s'est proposé de représenter la surface donnée, et l'on a pour cela déterminé un assez grand nombre de ses élémens. Ils sont tous tangens en projection horizontale à une courbe $\alpha\zeta\gamma$, qu'ils déterminent et qui est le contour de la projection de la surface. En projection verticale, ils touchent et déterminent une autre courbe $\delta\iota\zeta$, qui est le contour de la projection verticale.

Pour que la figure ne présente pas trop de confusion, on a supposé que le paraboloïde était terminé, premièrement, au plan horizontal de projection; secondement, au plan horizontal ZZ'; troisièmement enfin, au plan vertical ZZ", mené perpendiculairement à la ligne de terre WW'. Chaque élément perce le plan horizontal en un point, et la suite des points d'intersection de tous les élémens forme une courbe $\theta\lambda\pi$, qui est la trace horizontale de la surface donnée, et que l'on a représentée soigneusement, ainsi que l'intersection $\varphi\psi\omega$ de la même surface et du plan ZZ'. Il est évident que cette dernière ligne $\varphi\psi\omega$ s'obtient de la même manière que la trace $\theta\lambda\pi$, et qu'il est aisé de les décrire l'une et l'autre, dès qu'on connaît un nombre suffisant d'élémens du paraboloïde. Ceux de ces élémens qu'on a représentés, et qui ne servent pas à la solution du problème proposé, sont disposés d'une manière régulière sur les deux projections de la surface donnée. Ce qui a été dit précédemment (318) suffit pour qu'on puisse les construire.

321. Pour avoir une épure qui serve en même temps à la construction du plan tangent demandé et à la représentation facile et claire d'un paraboloïde hyperbolique, nous avons fait un choix particulier de données, et nous avons employé un mode de génération dans lequel on peut se passer de plan directeur.

Voici ce mode : soient M et N deux droites quelconques, et imaginons qu'on fasse mou-

voir une troisième droite D sur M et N, de manière que la droite mobile avance sur la droite M d'une distance *m*, lorsqu'elle avance sur la droite N d'une distance *n* : il est clair que toutes les positions de la droite D diviseront les directrices M et N en parties proportionnelles; donc la surface décrite sera de l'espèce des paraboloïdes hyperboliques (223).

Pl. 21. Fig. 2. 322. Ceci entendu, soient MV et MP deux plans verticaux perpendiculaires entre eux ; et soit AA′ la projection horizontale d'une droite perpendiculaire au plan MN, et conséquemment parallèle au plan MP. Prenons sur cette droite, que nous nommerons (AA′, A″, *aa′*), deux points quelconques (A, A″, *a*), (A′, A″, *a′*); par ces points menons deux droites (BH, *bh*, *at′*), (B′H′, *b′h′*, *ta′*), dont les projections horizontales BH, B′H′ fassent des angles égaux avec les lignes de terre MN, MP, et dont les projections verticales *at′*, *ta′*, soient parallèles : il s'ensuivra que les projections *bh*, *b′h′*, des mêmes droites, seront également inclinées sur MN. Enfin, menons perpendiculairement à MN une suite indéfinie de plans équidistans A′A″, OC′, KE′, FI′, DL′, TT″, etc., dont l'un passe par le point A″ et l'autre par le point T ; il est évident que les droites (BH, *bh*, *at′*), (B′H′, *b′h′*, *ta′*), seront divisées par ces plans en une infinité de parties égales (AC, A″C′, *ac*), (CE, C′E′, *ce*), (EI, E′I′, *ei*), etc., (TD, T′D′, *td*), (DF, D′F′, *df*), (FK, F′K′, *fk*), etc. Cela posé, joignons les points (A, A″, *a*), (T, T′, *t*), par la droite (AT, A″T′, *at*); puis le point (C, C′, *c*) voisin de (A, A″, *a*), avec le point (D, D′, *d*) voisin de (T, T′ *t*), par la droite (CD, C′D′, *cd*); puis les points correspondans (E, E′, *e*) et (F, F′, *f*), (I, I′, *i*) et (K, K′, *k*), etc. : les droites obtenues (AT, A″T′, *at*), (CD, C′D′, *cd*), (EF, E′F′, *ef*), (IK, I′K′, *ik*), etc., seront les élémens d'un paraboloïde hyperbolique. Et comme elles se projettent sur MP suivant des droites *at*, *cd*, *ef*, etc., qui divisent les parallèles *at*, *ta′*, en parties égales; il s'ensuit que ces élémens seront parallèles au plan (GG′, G′R, *gg′*), dont les traces GG′, *gg′*, sont perpendiculaires à MP, et la trace G′R parallèle à *at*.

323. On voit d'après cela que les élémens de la première génération s'obtiennent avec une extrême facilité. On va montrer qu'il en est de même de ceux de la seconde.

D'abord le plan directeur de la seconde génération devant être parallèle aux deux premières directrices (BH, *bh*, *at′*), (B′H′, *b′h′*, *ta′*), il aura pour trace verticale sur le plan MP, une droite G′Q parallèle à *at′* et à *a′t*; et pour trace horizontale une droite GG′ perpendiculaire à MP. D'un autre côté, deux élémens quelconques de la première génération peuvent servir de directrices à la seconde (225); donc on peut prendre pour ces directrices les élémens (AT, A″T′, *at*) et (A′T, A″T″, *a′t*). Or, il suit de là que la seconde génération est symétrique de la première; car les grandeurs qui les déterminent l'une et l'autre, et dont voici le tableau :

	1re GÉNÉRATION.	2e GÉNÉRATION.
Plans directeurs.	(GG′, G′R)...........	(GG′, G′Q)
Directrices.	(BH, *bh*, *at′*).........	(A′T, A″T″, *a′t*)
	(B′H′, *b′h′*, *ta′*).......	(AT, A″T′, *at*)

sont symétriques par rapport au plan vertical GG′; donc les élémens de l'une de ces géné-

rations s'obtiennent par les mêmes constructions que ceux de l'autre. Ainsi, en menant un plan ϕ_1, parallèle au plan G'Q, ce plan coupera les directrices (AT, *at*), (A'T, *a't'*) en deux points (I, ϕ), (K, ι), et la droite (IK, F'E', ϕ_1) sera un élément de la seconde génération. PL. 21. Fig. 2.

324. Nous ferons remarquer en passant que si la droite ϕ_1 est menée par le point x, où la projection *ef* d'un élément de la première génération rencontre la ligne G*t'*, l'élément obtenu (IK, F'E', ϕ_1), et l'élément (EF, E'F', *ef*), seront symétriques par rapport au plan GG'. De même deux élémens (IK, I'K', *ik*), (IK, F'E', ϕ_1) des deux générations seront symétriques par rapport au plan A"S. D'où l'on voit que les élémens des deux générations sont placés deux à deux symétriquement par rapport aux plans GG', A"S, et que chacun de ces plans divise par conséquent le paraboloïde en deux parties symétriques (*).

Or, les données dont on vient d'exposer la construction, sont celles qui ont servi pour la figure 1re. Elles ont, comme on voit, l'avantage de représenter un paraboloïde hyperbolique placé régulièrement par rapport aux deux plans de projection, ainsi que celui de se prêter, avec beaucoup de facilité, à la détermination des élémens des deux générations. Fig. 1.

Nous emploierons (*Science du dessin*, *liv. I*, *ch. Ier*) de semblables données dans une épure des ombres.

325. Pour distinguer facilement les lignes vues des lignes cachées de l'épure, nous concevrons que la surface donnée soit divisée en parties supérieure, inférieure, antérieure, et postérieure. La partie supérieure sera comprise entre les courbes de la surface dont les projections horizontales sont $\alpha\zeta\gamma$ et $\varphi\psi\varpi$. La partie inférieure sera comprise entre $\alpha\zeta\gamma$ et $\xi\lambda\pi$. Enfin, les parties antérieure et postérieure se trouveront séparées par la ligne qui se projette verticalement en $\delta\iota\zeta$. Cela posé, toutes les lignes de la partie supérieure du paraboloïde seront vues en projection horizontale; toutes celles de la partie inférieure étant au-dessous de la partie supérieure, ne seront vues en projection horizontale qu'en dehors de l'espace enfermé par les lignes $\alpha\zeta\gamma$, $\varphi\psi\varpi$. Enfin, en projection verticale, toutes les lignes de la partie antérieure seront vues, et celles de la partie postérieure seront cachées. Il sera facile de faire à chaque ligne l'application de ces principes.

Le plan directeur donné (GG', *gg'*) coupe le paraboloïde suivant l'élément (OI, *oi*), à partir duquel cette surface cesse d'être vue en projection horizontale; parce qu'au-delà de cet élément elle se trouve au-dessous du plan directeur. C'est par cette raison que la trace horizontale $\xi\lambda\pi$ de la surface donnée n'est pleine que jusqu'en I.

La trace horizontale GG' du plan directeur est ponctuée depuis le point I jusqu'à la droite ZZ'; parce qu'elle se trouve, dans cette partie, au-dessous du paraboloïde. La trace

---

(*) Les lecteurs qui ont étudié l'Analyse appliquée à la Géométrie des trois dimensions reconnaîtront que les plans GG', A"S, sont les plans diamétraux principaux de la surface donnée; que leur intersection (GG', A"S, *z*) est l'axe de cette surface, et que les particularités que présente la fig. 2 tiennent uniquement à ce que le plan horizontal est parallèle à l'un des plans diamétraux principaux; le plan vertical MN parallèle, à l'autre plan diamétral principal; le plan MP perpendiculaire à l'axe (GG', A"S, *z*); et enfin, à ce que les élémens des deux générations (BH, *bh*, *at'*) et (B'H', *b'h'*, *ta'*), (A"T, A"T", *a't'*) et (AT, A"T', *at*), qui ont été choisis pour directrices, sont tels que leurs projections sur MP forment un parallélogramme *ata't'* dont le centre est en *z*. Fig. 2.

Pl. 21. Fig. 1 verticale gg', du même plan, n'est évidemment vue qu'au-dehors de la projection de la surface donnée.

Quant au plan demandé (PQR, RY), on a supposé qu'il n'existait pas dans l'espace, et on a indiqué ses traces en lignes mixtes (55). Tout autre hypothèse conduirait à des parties vues et cachées que nous avons voulu éviter.

Pl. 22. 326. *Problème* 9. *On donne les trois droites* (AB, A'B'), (CD, C'D'), (EF, E'F'), *directrices d'un hyperboloïde à une nappe, et l'on demande*, 1°. *l'élément* (mn, $m'n'$) *qui passe par un point* (m, m') *de l'une des directrices données;* 2°. *le plan* (QR, ST) *tangent à l'hyperboloïde en un point* (P, P') *de l'élément* (mn, $m'n'$).

Pour avoir l'élément demandé, nous appliquerons le procédé exposé n° 227; et si nous remarquons, d'une part, que la surface conique auxiliaire qui a pour sommet le point (m, m'), et pour base la deuxième directrice (CD, C'D'), est une surface plane; d'autre part, que la surface projetante de la troisième directrice n'est autre chose qu'un plan vertical AB, les constructions à faire se réduiront aux suivantes. On prendra, sur la droite (CD, C'D'), deux points quelconques (a, a'), (c, c'); on menera par ces points, et par le point (m, m'), les droites (ma, $m'a'$), (mc, $m'c'$); elles perceront le plan vertical AB en deux points (e, e'), (i, i'), et ces points suffiront pour déterminer l'intersection (ei, $e'i'$) du plan projetant AB avec le plan mené par la directrice (CD, C'D') et par le point (m, m'). La projection verticale $e'i'$, de cette intersection, coupera la projection verticale A'B', de la directrice (AB, A'B'), en un point n', dont on déduira le point n, et ensuite l'élément cherché (mn, $m'n'$).

327. Soit donc (P, P') le point de cet élément par lequel il s'agit de mener un plan tangent à l'hyperboloïde. La surface donnée étant susceptible d'être engendrée de deux manières par le mouvement d'une ligne droite (228), il passera par le point (P, P') deux élémens de cette surface compris dans le plan tangent demandé (279). Or, (mn, $m'n'$) est l'un de ces élémens; donc, si nous construisons l'élément de la seconde génération correspondant au point (P, P'), nous aurons deux droites qui détermineront le plan tangent cherché.

Mais pour construire un élément de la seconde génération, il faut d'abord connaître trois élémens de la première; prenons donc sur la directrice (EF, E'F'), deux points quelconques (p, p'), (r, r'), et menons par ces points, au moyen du procédé employé plus haut, les élémens (pq, $p'q'$), (rs, $r's'$), qui avec l'élément (mn, $m'n'$) pourront servir de directrices à la

seconde génération. En menant par le point (P, P′) une droite (PL, P′L′), Pl. 22.
qui les touche toutes les trois, cette droite sera l'élément de la seconde génération qu'il s'agissait d'obtenir, et le plan cherché sera celui des deux lignes (*mn*, *m′n′*), (PL, P′L′).

328. Si l'on veut avoir ses traces, on remarquera que l'élément (*mn*, *m′n′*) perce le plan horizontal en Q et le plan vertical en T; on prendra sur (PL, P′L′) un point quelconque (N, N′); on menera par ce point la droite auxiliaire (NR, N′R′), parallèle à (*mn*, *m′n′*); elle sera dans le plan demandé, ainsi les traces R et S de (NR, N′R′) appartiendront à celles de ce plan : donc enfin, (QR, ST) sera le plan cherché.

Si l'élément (PL, P′L′) ne perçait pas les plans de projection en dehors du cadre, on n'aurait pas recours à la droite auxiliaire (NR, N′R′), parce qu'on obtiendrait immédiatement les traces de (PL, P′L′), et qu'on en déduirait les traces QR, ST.

Cette droite auxiliaire (NR, N′R′) a été choisie de manière à percer les plans de projection suivant deux points R et S, situés tous les deux dans l'intérieur du cadre; mais il résulte de là que les deux points R et Q sont trop voisins l'un de l'autre pour que le tracé de la ligne RQ soit bien exact. Pour obvier à cet inconvénient, on a mené par le point (U, U′), de (PL, P′L′), une droite (UV, U′V′) parallèle à (*mn*, *m′n′*); on a déterminé le point V où elle perce le plan horizontal, et comme ce point doit être sur la droite RQ, on a pu mener cette droite avec exactitude.

329. *Exécution de l'épure.* Nous n'avons pas représenté en lignes pleines les traces du plan demandé, parce qu'il aurait fallu, pour connaître les parties vues et cachées des directrices, entrer dans quelques détails que le lecteur suppléera aisément. Pour éviter aussi des recherches étrangères à notre objet, nous nous sommes dispensé de représenter la surface donnée.

Nous verrons plus loin (336) que si l'on donnait le point de contact par sa projection horizontale P, il serait aisé de déduire, des trois directrices données, la projection verticale P′ de ce point, et l'élément corrrespondant (*mn*, *m′n′*).

330. **Problème** 10. *Une surface gauche, dont la génératrice est constamment parallèle à un même plan, étant donnée avec la projection horizontale d'un de ses points, on demande le plan tangent à cette surface en ce point.*

Prenons pour plan vertical de projection le plan parallèlement auquel se meut la droite génératrice de la surface donnée, et soient (*acf*, *a′c′f′*), (*gim*, *g′i′m′*), les deux courbes directrices de cette surface, et M la projection horizontale du point par lequel il s'agit de Pl. 23.
mener le plan tangent demandé.

Pl. 23. Nous menerons une suite de plans ag, bh, ci...., parallèles au plan vertical de projection; ils couperont les directrices suivant les points (a, a') et (g, g'), (b, b') et (h, h'), (c, c') *et* (i, i') etc.; nous menerons par ces points des droites $(ag, a'g')$, $(bh, b'h')$, $(ci, c'i')$, etc., et ces droites seront évidemment des élémens de la surface gauche.

Ces élémens obtenus, on menera par le point M une droite quelconque nMs; on concevra par cette droite un plan vertical, et l'on déterminera les points (n, n'), (o, o'), (p, p'), etc., suivant lesquels il coupera les élémens représentés. Par ces points, on fera passer une courbe $(nMs, n'o'p'q'r's')$, qui sera évidemment l'intersection de la surface gauche et du plan vertical nMs. Mais le point de contact cherché est à la fois sur la surface donnée et dans le plan nMs; donc il a sa projection verticale sur $n'o'p'q'r's'$: donc si l'on mène par le point M une droite MM', perpendiculaire à la ligne de terre, elle coupera la courbe $n'o'p'q'r's'$ en un point M' qui sera la projection verticale correspondante au point donné M.

331. Connaissant le point de contact (M, M'), nous menerons par ce point un plan parallèle au plan vertical de projection; il coupera les directrices suivant deux points (A, A'), (B, B'), et il est clair qu'en menant par ces points la droite (AB, A'B'), cette droite, sera un élément entièrement contenu dans le plan tangent demandé, car cet élément passera par le point de contact (M, M') (279).

332. Il s'agira donc maintenant de construire parmi tous les plans qui passent par la droite (AB, A'B'), celui qui est tangent en (M, M') à la surface donnée. Or, nous aurons pour cela recours à un paraboloïde hyperbolique auxiliaire.

Nous menerons par les points (A, A'), (B, B'), des droites (AC, A'C'), (BD, B'D'), tangentes aux directrices données $(acf, a'c'f')$, $(gim, g'i'm')$, et nous imaginerons qu'une droite, toujours parallèle au plan vertical de projection, se meuve sur ces tangentes : il est clair qu'elle engendrera dans son mouvement un paraboloïde hyperbolique passant par l'élément (AB, A'B'); et je dis que ce paraboloïde et la surface gauche générale se toucheront tout le long de cet élément. En effet, la courbe $(acf, a'c'f')$ et la droite (AC, A'C') ont un élément linéaire commun entre elles; la courbe $(gim, g'i'm')$ et la droite (BD, B'D') ont aussi un élément linéaire commun entre elles; donc, pendant que la génératrice se meut sur les élémens linéaires infiniment petits (A, A'), (B, B'), la petite zone qu'elle engendre appartient aussi bien à la surface gauche générale qu'au paraboloïde; donc ces deux surfaces se touchent suivant cette petite zone : donc enfin tout plan tangent à l'une de ces surfaces, suivant un point de l'élément (AB, A'B), est aussi tangent à l'autre.

Il suit de là que pour avoir le plan tangent demandé, il suffira de mener par le point (M, M') un plan tangent au paraboloïde hyperbolique : ce qui est un problème que nous savons résoudre (315) et auquel il serait superflu de nous arrêter ici.

333. Le plan directeur étant choisi, comme nous l'avons supposé, pour plan vertical de projection, on pourrait se dispenser de construire la ligne $n'o'p'q'r's'$, pour trouver la projection verticale M' du point (M, M'); car le point M étant donné, le plan AB, qui contient l'élément de la surface sur lequel est (M, M'), s'ensuit nécessairement, cet élément s'ensuit aussi, et l'on en déduit aisément le point (M, M').

Il n'en serait pas ainsi dans le cas où le plan directeur ne serait pas parallèle à l'un des plans de projection. On serait alors obligé de suivre la marche que nous venons d'indiquer;

la construction des élémens serait un peu pénible : mais la solution serait d'ailleurs absolument telle que nous l'avons exposée. Pl. 23.

334. Il se pourrait que les deux tangentes obtenues (AC, A'C'), (BD, B'D'), fussent dans le même plan ; dans ce cas, le paraboloïde hyperbolique auxiliaire qui servirait à résoudre la question proposée, serait une surface plane, et cette surface présenterait la propriété de toucher le paraboloïde tout le long de l'élément (AB, A'B'). D'après cela, en faisant tourner un plan autour de cet élément, il ne serait tangent à la surface gauche que dans une seule de ses positions, mais tout le long de (AB, A'B'), ce qui fait exception aux propositions générales des n°s 243 et 368. Pour s'expliquer cette particularité, il suffira de remarquer qu'en supposant que les droites (AC, A'C'), (BD, B'D') soient dans un même plan, on admet nécessairement que la petite zone commune au paraboloïde et à la surface gauche générale soit composée d'élémens consécutifs situés dans ce même plan, ou, ce qui revient au même, que la surface donnée ne présente pas, suivant l'élément singulier (AB, A'B'), la propriété qui sert à définir les surfaces gauches, et qui est, comme on sait (214), qu'*en général*, deux élémens consécutifs de ces surfaces ne sont pas dans un même plan.

335. *Exécution de l'épure.* Pour que la figure soit bien intelligible, on s'est borné à représenter la partie de la surface donnée comprise entre les directrices et les élémens $(ag, a'g')$, $(fm, f'm')$. On a décrit sur le plan vertical le contour *uvxy* de la projection de cette surface, et l'on a marqué en lignes ponctuées les parties des élémens comprises entre ce contour et la projection $a'g'$, de l'élément antérieur $(ag, a'g')$, parce que ces parties sont cachées par la portion de la surface à laquelle appartient le point (a, a').

Il est facile de se rendre raison de la ponctuation des autres lignes de l'épure.

336. Problème 11. *Les trois directrices d'une surface gauche étant données, avec la projection d'un des points de cette surface, on demande le plan tangent en ce point à la surface donnée.*

Soient $(abcd, a'b'c'd')$, $(efgh, e'f'g'h')$, $(iklm, i'k'l'm')$, les trois directrices de la surface gauche, et M la projection horizontale du point de contact. Pl. 25.

Nous commencerons par chercher la projection verticale de ce point. Pour cela, nous construirons, par le procédé qui a été indiqué n° 227, plusieurs élémens $(aei, a'e'i')$, $(bfk, b'f'k')$, $(cgl, c'g'l')$, etc. ; ensuite nous menerons par le point M un plan vertical quelconque nM : il coupera la surface suivant une courbe $(nopq, n'o'p'q')$, facile à déterminer, et sur laquelle sera nécessairement le point de contact dont la projection horizontale est en M. Mais la projection verticale de ce point est la droite MM', menée par le point M perpendiculairement à la ligne de terre ; donc elle est à l'intersection M' des lignes $n'o'p'q'$ et MM' : donc le point de contact du plan tangent demandé est le point (M, M').

L'élément correspondant à ce point sera facile à construire ; car si l'on imagine un cône dont (M, M') soit le sommet, et qui ait pour base la directrice $(efgh, e'f'g'h')$, ce cône coupera nécessairement les directrices $(abcd, a'b'c'd')$, $(iklm, i'k'l'm')$, en deux points (A, A'), (C, C'), de l'élément cherché (ABMC, A'B'M'C'), lesquels le détermineront.

Pl. 24. 337 On pourrait encore obtenir le point M', et l'élément correspondant au point de contact, en substituant les constructions suivantes à celles que l'on vient d'exposer. Imaginons qu'une surface gauche ait pour directrices la verticale M et deux des droites directrices de la surface donnée, par exemple (*eh*, *e'h'*), (*im*, *i'm'*); cette surface coupera le cylindre *abcd* suivant une courbe qu'il sera aisé de construire, et qui donnera le point d'intersection de la surface auxiliaire et de la directrice (*ad*, *a'd'*). Or, en menant par ce point un élément de cette dernière surface, cet élément touchera tout-à-la-fois les quatre lignes (*ad*, *a'd'*), (*eh*, *e'h'*), (M, MM') et (*im*, *i'm'*); il sera par conséquent l'élément cherché (AC, A'C'), et le point de contact (M, M') s'ensuivra.

338. Connaissant le point (M, M') et l'élément (AC, A'C'), on menera par les points (A, A'), (B B'), (C, C'), les droites (AD, A'D'), (BE, B'E'), (CF, C'F'), tangentes aux trois directrices données; on imaginera qu'une nouvelle droite se meuve sur ces trois droites, elle engendrera un hyperboloïde à une nappe, et je dis que cet hyperboloïde sera tangent à la surface donnée tout le long de l'élément (AC, A'C'). En effet, les directrices droites, et les directrices courbes correspondantes, ont de petits élémens linéaires communs entre elles; donc, pendant que la génératrice se meut sur ces petits élémens, la portion de surface infiniment étroite qu'elle engendre est commune à l'hperboloïde et à la surface donnée : donc tout plan tangent à l'une de ces surfaces, suivant un point de l'élément (AC, A'C'), est aussi tangent à l'autre.

Il suit de là que pour avoir le plan tangent demandé, il ne s'agira que de mener par le point (M, M') un plan tangent à l'hyperboloïde. Nous renverrons pour cela au problème 9 qui précède (326).

339. Si les trois tangentes (AD, A'D'), (BE, B'E'), (CF, C'F'), se trouvaient dans un même plan, l'hyperboloïde auxiliaire ne serait autre chose qu'une surface plane, tangente à la surface donnée tout le long de l'élément (AC, A'C'), et cet élément serait une ligne singulière, analogue à celle dont il a été question n° 334.

340. Problème général. *Étant donnée une surface quelconque et un de ses points, trouver le plan tangent à cette surface en ce point.*

Par le point donné on menera deux plans qui coupent la surface donnée, on déterminera leurs intersections avec cette surface, on menera par le même point, et par le procédé que nous verrons n° 766, des tangentes à ces sections, et le plan déterminé par ces tangentes sera le plan cherché (148).

Si le point donné était un point multiple, les deux plans auxiliaires donneraient, pour chaque nappe de surface passant par ce point, deux sections et deux tangentes, et ces tangentes détermineraient le plan tangent à cette nappe. Il faudrait seulement avoir soin de ne pas confondre les tangentes à une nappe avec celles d'une autre nappe.

341. La longueur des constructions qu'exige cette solution la rend à peu près impraticable : mais elle peut être simplifiée toutes les fois qu'on peut mener sur la surface donnée, et par le point donné, une ou deux courbes dont on sache construire facilement les tangentes; parce qu'on substitue ces courbes aux sections auxiliaires dont il vient d'être parlé. En voici des exemples.

Ordinairement, on sait mener des tangentes à la génératrice d'une surface; en menant

donc par le point donné la position correspondante de cette génératrice, on n'aura plus besoin que d'une seule section plane auxiliaire.

Or, lorsqu'une génération est donnée par une seule directrice, la surface a presque toujours une seconde génération simple, dans laquelle la directrice primitive devient une génératrice constante ou variable de forme, et mobile par rapport à une ou plusieurs positions de la première génératrice devenues des directrices. On peut donc, au moyen de cette double génération, obtenir deux courbes passant par un point connu de la surface; et le plan tangent en ce point devant passer par les tangentes à ces courbes (147), il se trouve déterminé sans le secours des sections planes auxiliaires.

342. Ces simplifications de la solution générale s'appliquent aux cylindres, aux cônes et aux surfaces de révolution. En effet, une surface cylindrique peut également être engendrée par sa génératrice, mobile parallèlement à elle-même sur la directrice, ou par cette directrice, constante de forme, et en mouvement le long d'une position de la première génératrice, de manière que ses différens points parcourent dans le même temps des espaces égaux, c'est-à-dire parallèlement à elle-même. Un cône peut de même être produit par le mouvement de sa directrice, mobile sans tourner sur un de ses élémens, pourvu qu'elle varie de grandeur, en restant semblable à elle même, proportionnellement à l'espace parcouru. (*Voyez* la Note 5.) Enfin, une surface de révolution, qu'on peut considérer comme produite par une courbe mobile sur un cercle et assujettie à rester toujours placée de la même façon par rapport à ce cercle, est aussi susceptible d'une autre génération, dans laquelle le cercle directeur se meut parallèlement à lui-même, en variant de rayon, et en s'appuyant sur trois positions de la première génératrice. Or, dans tous ces cas, on peut mener par le point de contact donné, 1° une position de la génératrice de la première génération; 2° une des positions qu'occupe la directrice dans la seconde génération, et le plan tangent s'ensuit, par un procédé qui ne diffère pas, au fond, de ceux que nous avons précédemment exposés.

343. Le même procédé sert à mener des plans tangens à beaucoup d'autres genres de surfaces; mais on ne peut l'appliquer ni aux surfaces gauches, ni aux enveloppes. On verra, dans le Complément (697), une résolution graphique très générale du problème du plan tangent aux premières de ces surfaces; et quant aux dernières, il est visible que puisqu'elles sont touchées en tous leurs points par leurs enveloppées, la recherche du plan tangent, en un point d'une enveloppe, se ramène à celle du plan tangent au même point à l'enveloppée correspondante.

D'après cela, une surface donnée étant cylindrique, conique, de révolution, gauche ou enveloppe, c'est-à-dire une des surfaces examinées Livre II, le problème général proposé pourra toujours être résolu par des moyens directs.

CHAPITRE II.

Des plans tangens menés par un point donné au dehors d'une surface.

Nous allons nous donner un point, et successivement une surface cylindrique, conique, de révolution, etc., et construire dans chaque cas le plan tangent de la surface passant par le point donné.

Pl. 25. Fig. 1. 344. PROBLÈME 1er. *Par un point* (A, A'), *donné au-dehors d'une surface cylindrique connue, mener un plan tangent à cette surface.*

Tout plan tangent à une surface cylindrique passe par un élément de cette surface (279); donc si l'on mène par le point donné une parallèle à la génératrice de la surface donnée, cette parallèle sera tout entière comprise dans le plan tangent demandé.

Soit donc *abc* la trace horizontale de la surface donnée, et (MN, M'N'), la droite parallèlement à laquelle se meut sa génératrice; nous menerons, par le point (A, A'), la ligne (CAB, C'A'B'), parallèle à (MN, M'N'); cette droite percera le plan horizontal au point B, et si nous menons la droite B*a* tangente en *a* à la trace *abc*, je dis que le plan qui passera par cette tangente et par le point (A, A') sera le plan demandé. En effet, car la droite (AB, A'B') étant parallèle aux élémens de la surface, ce plan contiendra l'élément (*ai*, *a'i'*), mené par le point (*a*, *a'*) où se touchent la tangente B*a* et la trace *abc*; donc ce même plan touchera la surface donnée en (*a*, *a'*), et par conséquent (281) tout le long de l'élément (*ai*, *a'i'*): donc il sera le plan tangent cherché.

Connaissant la trace B*a* de ce plan, et un point (A, A'), par lequel il passe, on en déduira aisément sa trace verticale; d'ailleurs cette trace passe nécessairement par les points (C, C') et (*i*, *i'*), où les droites (AB, A'B'), (*ai*, *a'i'*), percent le plan vertical: donc le plan (*a*B, C'*i'*) est le plan tangent demandé.

345. Il est clair que ce problème aura autant de solutions qu'il y aura de tangentes à la courbe *abc* menées par le point B. Dans la figure, *abc* est un

cercle, aussi, dans le cas pris pour exemple, le problème proposé a-t-il deux solutions, dont une seulement a été construite. Pl. 25. Fig. 1.

346. *Exécution de l'épure.* Le cylindre donné est représenté par ses traces et par les élémens qui servent de contours à l'une et à l'autre de ses deux projections. Ce cylindre est entièrement caché par le plan tangent demandé (aB, C'i'); donc toutes les lignes qui lui appartiennent, hors l'élément de contact (ai, $a'i'$), qui est dans le plan tangent, doivent être indiquées par des points. Quant aux droites aB, C'i', ai, $a'i'$, elles sont évidemment vues, ainsi que MN et M'N'; elles sont par conséquent indiquées en lignes pleines.

347. PROBLÈME 2. *Par un point* (A, A') *donné au-dehors d'un cône dont le sommet est* (S, S'), *et dont la trace horizontale est la courbe abc, mener un plan tangent à ce cône.* Fig. 2.

Tout plan tangent à une surface conique devant passer par un des élémens de cette surface (279), il contient nécessairement son sommet; donc le plan demandé passera par la droite (AS, A'S') : donc la trace horizontale de ce plan passera par le point B, et sa trace verticale par le point C'.

Menons par le point B la tangente aB à la trace abc; je dis que le plan que déterminera le point (A, A') et la droite aB sera le plan demandé. En effet, ce plan contiendra l'élément (aS, a'S'), correspondant au point de contact (a, a') de la trace abc et de la tangente aB; donc il sera tangent en (a, a'), et par conséquent (287) tout le long de l'élément (ad, $a'd'$), à la surface du cône donné : donc il sera le plan tangent cherché.

La trace verticale de ce plan passera évidemment par les points C' et d', où les droites (AS, A'S'), (aS, a'S'), percent le plan vertical; ainsi les traces du plan demandé seront les droites aBD et Dd'C'. On sait d'ailleurs, par ce qui a été dit précédemment (290), que la trace Dd'C' sera tangente en d' à la trace verticale du cône.

Il est clair que si l'on mène par le point B une seconde tangente à la trace abc, elle déterminera une deuxième solution du problème proposé.

348. *Exécution de l'épure.* Le cylindre donné est représenté par ses traces, par les élémens qui servent de contours à ses deux projections, par son sommet, et par l'élément de contact (aSd, a'S'd'). La nappe inférieure est, par rapport aux deux plans de projection, derrière ou sous le plan tangent; donc les lignes qui lui appartiennent, hors la droite (aS, a'S) qui est dans ce plan, doivent être ponctuées. Quant à la nappe supérieure, elle est

au-dessus et en avant du plan tangent, par rapport aux deux plans de projection; ainsi la détermination des parties pleines et ponctuées de cette nappe se fera de la même manière que si elle était isolée dans l'espace (186—191).

349. *Problème* 3. *Par un point donné au-dehors d'une surface sphérique, mener un plan tangent à cette surface.*

Concevons qu'on ait trouvé le plan demandé, supposons-le solide, ainsi que la sphère donnée, et imaginons qu'on le fasse rouler sur cette sphère, sans qu'il cesse de passer par le point donné; il est évident que le plan mobile satisfera dans toutes ses positions au problème proposé : donc le nombre de solutions de ce problème est infini.

Considérons deux positions consécutives du plan mobile; elles se couperont suivant une droite qui sera la caractéristique d'un cône ayant pour sommet le point donné, circonscrit à la sphère donnée, et touchant cette sphère suivant une ligne particulière, qui est le lieu des points de contact des diverses positions du plan mobile, et qu'on appelle la *ligne de contact* ou *courbe de contact* du cône circonscrit et de la sphère donnée. Or, il est clair que tout plan tangent à la sphère, en un des points de cette ligne, satisfait au problème proposé; d'où l'on voit que la courbe de contact en question est une espèce de lien qui réunit les solutions de ce problème, et qui fournit le moyen d'en avoir une quelconque à volonté. D'après cela, il conviendra de savoir construire cette courbe.

350. Pour la déterminer, on menera par le point M une suite de plans verticaux; chacun de ces plans coupera la sphère donnée suivant un cercle; on menera par le point M deux tangentes à ce cercle; on déterminera les points de contact de ces tangentes, et par ces points on menera une courbe qui sera évidemment la courbe de contact cherchée.

Il est facile de prouver que cette courbe sera circulaire; en effet, les données qui la déterminent consistent en un point M, et en une sphère connue : or, concevons par le centre C de la sphère et par ce même point M, une ligne droite MC; les données se trouveront disposées de la même manière tout autour de cette droite : donc la courbe de contact aura tous ses points disposés aussi de la même manière autour de la droite MC. Mais il n'y a qu'un cercle qui puisse satisfaire à cette condition; donc le lieu des points de contact de la sphère et des plans qui résolvent le problème proposé est une ligne circulaire.

Nous n'appliquerons à aucun exemple les constructions que nous venons d'indiquer; les problèmes ci-après les feront suffisamment connaître.

351. *Problème* 4. *Par un point donné hors d'une surface de révolution, mener un plan tangent à cette surface.*

Par le point donné, que nous nommerons M, menons un plan auxiliaire P, coupant la surface donnée, et construisons son intersection φ avec cette surface. On pourra mener des tangentes à cette courbe; car ces tangentes ne seront autre chose (152) que les intersections du plan P et des plans tangens à la surface de révolution, menés par des points donnés de cette surface, plans tangens que l'on sait construire (292). Donc on pourra, par le procédé exposé n° 121, mener par le point M, situé au dehors de la section φ, une tangente à cette section, et obtenir le point de contact C de cette tangente. Concevons qu'on mène par ce point C un plan tangent à la surface de révolution, ce plan contiendra la tangente MC; donc il contiendra le point M : donc il satisfera au problème proposé. Or, comme il y a une infinité de plans comme le plan P, le problème aura en général un nombre infini de solutions.

352. Si l'on suppose qu'un des plans qui résolvent ce problème tourne autour de la surface de révolution, sans cesser de la toucher et sans cesser de passer par le point M, il engendrera une enveloppe conique, ayant pour sommet le point M, circonscrite à la surface donnée, et touchant cette surface suivant une ligne, qui est le lieu de toutes les positions que le point de contact C aura occupées dans le mouvement du plan tangent, et qu'on appelle *ligne* ou *courbe de contact* de la surface donnée et du cône circonscrit. Et comme tout plan tangent en un des points de cette courbe, à la surface de révolution, résout le problème proposé, on voit qu'elle sert de lien aux solutions de ce problème, et que, pour le résoudre le plus complètement possible, il convient de la construire.

Comme les opérations à faire pour cela sont d'une grande importance, nous allons en faire l'objet d'un problème séparé.

353. *Problème* 5. *Étant donnée la surface de révolution* Pl. 25.
{(I, I'T'), (XY, I'Gp'E'H)} *et un point* (M, N), *on demande la courbe de contact de cette surface et du cône circonscrit qui aurait pour sommet le point* (M, N).

Pour résoudre ce problème, nous rappellerons qu'on peut considérer la surface donnée, quelle qu'elle soit, comme l'enveloppe d'un cône mo-

Pl. 36. bile, d'une sphère mobile ou d'un cylindre mobile (269—271), et nous nous demanderons les points de la courbe cherchée situés sur une caractéristique donnée. A cette caractéristique il correspondra une enveloppée; cette enveloppée sera touchée par un cône circonscrit, ayant pour sommet le point (M, N), suivant des lignes particulières; il sera facile de déterminer les points de la caractéristique qui appartiendront à ces lignes, et ces points seront évidemment les points demandés; car les plans tangens à l'enveloppée, qui leur correspondront, seront tangens suivant ces mêmes points à la surface donnée (251).

Sachant trouver les points de la courbe cherchée situés sur une caractéristique quelconque, on pourra déterminer autant de ces points qu'on en voudra, et il sera par conséquent aisé de décrire les projections de cette courbe.

Mais, comme l'enveloppe a trois sortes d'enveloppées fort simples, il y a trois procédés remarquables qui conduisent aux points de la courbe demandée. Nous allons exposer ces procédés avec détail, ainsi que la construction des points singuliers de cette courbe.

354. 1er *Procédé, dans lequel l'enveloppée est une surface conique.* Cherchons les points de la courbe demandée qui sont sur la caractéristique $(oxhy', o'h')$. On construira d'abord la droite $o'a$, tangente en o' à la méridienne I'Gp'E'H; cette droite sera la génératrice de l'enveloppée conique correspondante à la caractéristique donnée, et le sommet de cette enveloppée sera le point (I, a). Ensuite, on menera par le point (M, N), et par le point (I, a), la droite (MId, Nad'); elle percera le plan de la caractéristique en (d, d'); par ce point on menera les tangentes $(dx, d'x')$, $(dy', d'y)$ à cette même caractéristique; on déterminera les points de contact (x, x'), (y', y), et ces points seront les points cherchés. En effet, car si l'on mène par ces points des plans tangens à l'enveloppée, ces plans passeront par les tangentes $(dx, d'x')$, $(dy', d'y)$; ils passeront par conséquent par le point (d, d') : mais ils passeront aussi par le sommet (I, a); donc ils passeront par la droite (Id, $a'd'$); donc ils contiendront le point (M, N) : or, ils seront tangens en même temps à l'enveloppée et à l'enveloppe; donc enfin, ces points seront les points de contact de deux plans tangens à la surface donnée passant par le point (M, N); donc, etc.

Si la courbe demandée n'avait aucun point sur la caractéristique circulaire $(oxhy', o'h')$, le point (d, d') se trouverait dans l'intérieur de cette caractéristique, et ce procédé ne conduirait à aucun résultat.

355. 2ᵉ *Procédé, dans lequel l'enveloppée est une surface sphérique.* Pl. 26.
Cherchons les points de la courbe demandée qui sont sur la caractéristique $(peqc, p'q')$. On commencera par mener la droite $p'b$, normale en p' à la méridienne I'Gp'E'H ; elle rencontrera I'I″ en un point b ; et de ce point comme centre, avec le rayon bp', on décrira le cercle $p'sq'g$, qui sera la méridienne principale de l'enveloppée sphérique correspondante à la caractéristique donnée. On imaginera ensuite un cône circonscrit à l'enveloppée, et dont le sommet soit en (M, N) ; on déterminera le cercle de contact de ce cône et de la sphère ; ce cercle coupera la caractéristique en deux points, et ces deux points seront évidemment les points cherchés.

Pour trouver leurs projections, nous ferons tourner le méridien MI avec l'enveloppée et le cône circonscrit, autour de l'axe de révolution, jusqu'à ce que ce méridien soit arrivé en M'I. Dans ce mouvement, le centre (I, b) de la sphère ne bougera pas, le sommet (M, N) viendra en (M', N'), et l'axe du cône circonscrit se trouvera par conséquent dans le plan M'I. Par le point N' on menera les droites N's, N'g, tangentes au cercle $gp'sq'$; elles le toucheront en deux points s et g ; on joindra ces points par une droite sg, et il est facile de voir que cette droite sera la projection du cercle de contact de l'enveloppée et du cône circonscrit. Le cercle sg et le cercle $p'q'$, situés sur une même sphère, se couperont en deux points, et ces points ne seront autre chose que les positions qu'occupent les points cherchés lorsque le point (M, N) est en (M', N'). Or, nous remarquerons que ces points sont sur une droite $(l'l', l)$, perpendiculaire en (u, l) au plan méridien M'I ; nous ramenerons ce plan en MI ; le point u décrira autour du point I un arc de cercle uv, il s'arrêtera en v, et la droite $l'l''$, perpendiculaire en u sur M'I, prendra la position ce, perpendiculaire en v à la droite MI. D'après cela, la droite ce contiendra les projections horizontales des points cherchés : mais le cercle $peqc$ contiendra ces mêmes projections ; donc elles seront en e et c. Il sera facile d'en déduire les projections verticales e' et c', et l'on aura les points cherchés (e, e'), (c, c').

Si les lignes sg et $p'q'$ ne se rencontraient pas dans l'intérieur du cercle $p'sq'g$, les cercles sg et $p'q'$ n'auraient pas de points communs, et il en résulterait que la courbe demandée n'aurait aucun point sur la caractéristique donnée $p'q'$.

356. 3ᵉ *Procédé, dans lequel l'enveloppée est une surface cylindrique.*

Pl. 26. Cherchons les points de la courbe demandée qui sont sur la caractéristique nIw. Nous ferons d'abord remarquer que l'enveloppée correspondante à cette caractéristique est le cylindre horizontal auquel elle sert de base, et dont les élémens sont perpendiculaires au plan méridien nw. Nous menerons ensuite la droite (Mn, Nn') perpendiculaire à ce plan; elle le percera en un point (n, n'); par ce point nous menerons des tangentes à la caractéristique nw, et les points de contact de ces tangentes seront les points cherchés. En effet, les plans qui passeront par ces tangentes et par la droite (Mn, Nn'), contiendront le point (M, N), et seront tangentes à l'enveloppée suivant les points dont il s'agit : or, ces points sont sur la caractéristique; donc les mêmes plans seront tangens à l'enveloppe suivant les mêmes points. Donc, etc.

Pour construire ces points, nous rabattrons le méridien In en IP; le point (n, n') viendra en (P, Q), et la méridienne nw viendra en (XY, I'Gp'E'H); par le point Q on menera les droites Qr et Qk', tangentes en r et k' à la courbe I'Gp'E'H; on mettra les points de contact r et k' en projection horizontale en r' et k; on les ramenera ensuite dans le méridien nw en (t' t) et (m, m'), et ces derniers points seront les points cherchés.

Il est clair que ce troisième procédé donnera autant de points de la courbe demandée qu'il sera possible de mener par le point Q de tangentes à la courbe I'Gp'E'H.

357. *Construction des points singuliers de la courbe demandée.* Au moyen des trois procédés précédens, ou même d'un seul de ces procédés, on peut trouver autant de points de la courbe demandée qu'on en peut désirer; mais, parmi ces points, il en est de remarquables qu'il est bon de construire de préférence à d'autres.

Menons par le point M les droites MU, MT, tangentes au contour (UTX, U'T') de la projection horizontale de la surface donnée; ces droites seront les traces de deux plans verticaux tangens à cette surface : en mettant donc les points U et T en projection verticale en U' et T', les points de contact (U, U'), (T, T'), ainsi déterminés, seront deux points de la courbe demandée.

Par le point N menons les droites NE', NF', tangentes à la méridienne principale; il est évident qu'elles seront les traces de deux plans NE', NF', qui seront perpendiculaires au plan vertical, et qui toucheront la surface donnée suivant les points (E, E'), (F, F'), de la courbe cherchée.

358. Enfin, construisons les points de cette même courbe situés dans le méridien M*id*. Pour cela, nous rabattrons le méridien IM sur le méridien IR, en le faisant tourner sur l'axe (I, I'I''); le point (M, N) viendra en (R, S), et si par le point S on mène à la méridienne (XY, I'G*p*E'H) les tangentes S*i'*, S*z'*, ces tangentes détermineront deux points de contact (*i*, *i'*), (*z*, *z'*), qui, ramenés en (D, D') et (B, B'), dans le méridien MI*d*, seront évidemment les points cherchés. Pl. 26.

359. Ces points (D, D'), (B, B'), jouissent d'une propriété remarquable, c'est que leurs hauteurs au-dessus du plan horizontal sont des *maximum* ou des *minimum* (*). En effet, comparons les hauteurs de ces points à celles des points (*t'*, *t*), (*m*, *m'*), obtenus n° 356, et situés dans le méridien quelconque *n*I. Le triangle M*n*I est rectangle en *n*; donc on a MI > *n*I; mais MI = IR = I''S, *n*I = IP = I''Q; donc, quel que soit le plan méridien *n*I, le point Q sera toujours tel qu'on ait I''S > I''Q. Il suit de là que les tangentes S*i'*, S*z'*, limitent les positions de celles, comme Q*r* et Q*k'*, qui partent des diverses positions que peut avoir le point Q, et, par conséquent, que les hauteurs des points *i'* et *z'* sont des maximum ou des minimum par rapport à celles des points de contact *r* et *k'* des tangentes Q*r* et Q*k'*. Or, les hauteurs des points *i'* et *z'* sont celles des points (D, D'), (B, B'); les hauteurs des points *r* et *k'* sont celles des points (*t'*, *t*), (*m*, *m'*); donc les hauteurs des points (D, D') et (B, B'), au-dessus du plan horizontal, sont des maximum ou des minimum par rapport à celles des points d'intersection (*t'*, *t*), (*m m'*), de la courbe cherchée et d'un méridien quelconque *n*I*w*.

360. De ce que la hauteur d'un point d'une courbe est un maximum ou un minimum par rapport aux hauteurs des autres points de la même courbe, il s'ensuit que l'élément infiniment petit qui correspond à ce point est horizontal; car, sans cela, cet élément contiendrait des points plus hauts que le point en question, et d'autres points plus bas, ce qui est impossible. Donc les tangentes à la courbe demandée en (D, D') et (B, B') sont des horizontales. Et comme ces tangentes sont dans les

(*) Dans une suite de grandeurs soumises à la loi de continuité (135 note), on appelle *maximum* et *minimum* les grandeurs plus grandes et les grandeurs moindres que celles qui les précèdent et qui les suivent immédiatement. Ainsi les tangentes à l'ellipse V'LN'L', en L et L', étant parallèles à la droite T*m*, prise pour axe des abscisses (881), les ordonnées I'L', I'L, seront, la première un maximum, et la dernière un minimum. Pl. 18. Fig. 1.

Pl. 26. plans tangens menés par le point (M, N) à la surface donnée, il est clair que leurs projections horizontales sont des parallèles aux traces horizontales de ces plans. Mais on sait que ces traces sont perpendiculaires à la trace MI du plan méridien (294); donc les tangentes de la courbe cherchée en (D, D′) et (B, B′) ont pour projections horizontales des perpendiculaires à MI, et pour projections verticales des parallèles à la ligne de terre : donc ces tangentes sont parfaitement connues.

361. Il n'en est pas de même des tangentes aux points singuliers (U, U), (T, T′), (E, E′), (F, F′), précédemment déterminés : mais, comme elles sont nécessairement contenues dans les plans tangens MU, MT, NE′, NF′, il s'ensuit que les droites MU, MT, NE′, NF′, en sont une projection.

362. Il résulte de ce qui précède qu'on peut diviser les points singuliers que nous venons d'obtenir en trois espèces; la première est celle des points (D, D′), (B, B′), qui satisfont à la condition d'être les plus hauts ou les plus bas du petit arc de courbe auquel ils appartiennent. On connaît les tangentes qui leur correspondent. La deuxième est celle des points (U, U′), (T, T′), qui sont sur le contour de la projection horizontale de la surface donnée. On connaît les projections horizontales MU, MT, des tangentes correspondantes. Enfin, la troisième est celle des points (E, E′), (F, F′), qui sont situés sur le contour de la projection verticale de la surface. On connaît les projections verticales NE′, NF′, des tangentes correspondantes de la courbe cherchée.

Ces points singuliers et ces tangentes indiquent pour l'ordinaire la forme générale de cette courbe; et comme on les obtient par des opérations très faciles, c'est toujours par ces opérations qu'il convient de commencer la résolution du problème proposé.

363. *Exécution de l'épure.* Dans la figure prise pour exemple, la courbe demandée doit passer par les points (U, U′), (T, T′), (E, E′), (F, F′), (D, D′), (B, B′), (x, x'), (y, y'), (c, c'), (e, e'), (t, t') et (m, m'); ainsi, le tracé de ses projections pourra se faire aisément.

L'axe de révolution (I, I′I″) étant compris, de (I, I′) en (I, I″), dans l'intérieur de la surface donnée, il est marqué entre ces points par une ligne ponctuée. Au-delà, il est tracé par des lignes pleines. La surface donnée est indiquée simplement au moyen des contours de ses projections, lesquels sont aussi marqués en lignes pleines.

Quant à la courbe demandée, il est évident que l'arc (TBU, T'B'U') Pl. 26.
est sur la moitié inférieure de la surface, et que l'arc (TDU, T'D'U'), au contraire, est sur la moitié supérieure; donc la ligne TBU doit être ponctuée, et la ligne TDU pleine. En projection verticale, l'arc (FUE, F'U'E'), situé sur la partie postérieure de la surface, est nécessairement caché, tandis que l'arc (FTE, F'T'E'), situé sur la partie antérieure, est nécessairement vu; donc F'U'E' doit être ponctué, et F'B'E' doit être formé par une ligne pleine (56).

Les autres lignes de l'épure sont des lignes de construction.

364. *Problème 6. Par un point donné, au dehors d'une surface gauche, mener un plan tangent à cette surface.*

Par le point donné et par un élément quelconque de la surface gauche, on menera un plan, et ce plan (245) sera le plan demandé. D'où l'on voit que le problème proposé aura une infinité de solutions.

365. Si l'on en construit un nombre suffisant, que l'on détermine les points de contact correspondans à chacune, et que l'on mène une ligne par ces points, cette ligne sera la courbe de contact de la surface donnée et du cône circonscrit ayant pour sommet le point donné.

366. *Problème général. Par un point donné au dehors d'une surface connue, mener un plan tangent à cette surface.*

Pour résoudre ce problème, on emploiera le procédé exposé n° 351. On menera donc par le point donné un plan quelconque, assujetti seulement à couper la surface donnée; on déterminera leur courbe d'intersection (144); on cherchera le point de contact de la tangente menée à cette courbe par le point donné (121), et en menant par ce point un plan tangent à la surface donnée, ce plan satisfera au problème proposé.

367. Il suit de là que la surface donnée aura en général une infinité de plans tangens passant par le point donné. Il sera aisé d'en construire autant qu'on en voudra, et si l'on détermine les points de contact de chacun d'eux, et qu'on mène une ligne par ces points, cette ligne sera la courbe de contact du cône qui envelopperait la surface et qui aurait pour sommet le point donné.

368. Si la surface donnée est une surface développable, la courbe de contact sera remplacée par une ou plusieurs droites, et le problème proposé n'aura qu'un nombre fini de solutions; car tous les plans tangens suivant les divers points d'une de ces droites ne feront qu'un seul et même plan. Les problèmes 1 et 2 de ce chapitre en fournissent des exemples

CHAPITRE III.

Des plans tangens menés parallèlement à une droite donnée.

Pl. 27. Fig. 1. 369. PROBLÈME 1er. *Mener un plan tangent à une surface cylindrique* { (ABC, B'C'), (DE, D'E') }, *parallèlement à la droite donnée* (GF, G'F').

Pour cela, nous remarquerons que le plan cherché est aussi parallèle à la direction (DE, D'E') de la génératrice ; d'où il suit qu'il est à la fois parallèle aux deux droites (GF, G'F'), (DE, D'E'). Donc, si par un point quelconque (H, H') de la première de ces droites, nous menons (HI, H'I') parallèle à la seconde, et que nous construisions le plan (IG, F'K'), que déterminent les deux lignes (GF, G'F'), (HI, H'I'), ce plan sera parallèle au plan tangent demandé. Si donc nous menons sur le plan horizontal une droite MN, tangente à la trace ABC et parallèle à IG, et sur le plan vertical la droite MO parallèle à F'K', le plan (MN, MO) sera le plan cherché.

Il est clair que le problème proposé aura autant de solutions qu'il sera possible de mener, parallèlement à IG, de droites tangentes à la trace ABC.

370. *Exécution de l'épure.* Le cylindre donné est représenté simplement par sa trace horizontale et par les contours de ses projections. L'élément de contact (N*r*, *nr'*) est ponctué, parce qu'il n'est pas vu. Le cylindre donné étant au-dessus et en avant du plan demandé (MN, MO), il cache une partie des traces de ce plan.

On a marqué sur l'épure, au moyen de lignes ponctuées, la droite (DE, D'E'), qui passe par le centre de l'ellipse ABC. Cette droite est une espèce d'axe de la surface donnée.

Fig. 2. 371. PROBLÈME 2. *Mener un plan tangent à une surface conique* {(ABC, B'C'), (D, D')}, *parallèlement à la droite donnée* (EF, E'F').

Le plan tangent cherché devant passer par le centre (D, D') de la surface donnée, il ne s'agira que de mener par ce point une droite (DG, D'G'), pa-

rallèle à la droite (EF, E'F'), pour avoir un point G de la trace horizontale de ce plan. Par ce point, on menera la droite GH tangente à la courbe ABC; cette droite sera la trace horizontale dont il s'agit, et en menant, par le point (D, D'), la droite (DK, D'K'), parallèle à GH, elle percera le plan vertical en un point K', qui déterminera la trace verticale LK' du plan demandé (LH, LK'). Pl. 27. Fig. 1.

Il est clair que dans le cas de la surface prise pour exemple, le problème a deux solutions; car on peut mener par le point G deux tangentes à la courbe ABC. On n'a marqué sur l'épure qu'une de ces solutions.

372. *Exécution de l'épure.* Nous ferons remarquer seulement que la nappe inférieure du cône est au-dessous et en-deçà du plan tangent construit, et que la nappe supérieure est au-dessus et au-delà. C'est pour cette raison que l'élément de contact (*i*D, C'D'), est ponctué dans la partie qui appartient à la nappe inférieure, et plein dans celle qui appartient à la nappe supérieure.

373. PROBLÈME 3. *Etant données une surface de révolution et une droite, on demande un plan parallèle à cette droite et tangent à la surface donnée.*

Ce problème, comme on va le voir, a la plus grande analogie avec le problème 4 du chapitre précédent (351).

Imaginons qu'un plan, parallèle à la droite donnée, se meuve parallèlement à lui-même jusqu'à ce qu'il touche la surface de révolution, et figurons-nous qu'ensuite ce plan tourne autour de cette surface, sans cesser de la toucher et sans cesser d'être parallèle à la droite donnée; il est clair qu'il engendrera dans son mouvement une surface cylindrique qui enveloppera la surface donnée, et qui aura ses élémens parallèles à la droite donnée.

Or, cette surface cylindrique et la surface de révolution se toucheront suivant une courbe particulière; et comme le plan générateur occupe successivement toutes les positions parallèles à la droite donnée dans lesquelles il touche la surface donnée, il s'ensuit que cette courbe est le lieu des points de contact de tous les plans tangens qui résolvent le problème proposé. Si donc on construit cette courbe, c'est-à-dire la ligne de contact de la surface de révolution et du cylindre circonscrit parallèle à la droite donnée, on pourra aisément déterminer autant de solutions de ce problème qu'on en voudra; puisqu'il ne s'agira pour cela que de mener, par des points pris arbitrairement sur la courbe de contact, des plans tangens à la surface donnée.

La construction de cette courbe étant une opération importante qui sera souvent utile par la suite, nous allons en faire l'objet d'un problème séparé (374).

S'il ne s'agissait que d'avoir l'une quelconque des solutions de la question proposée, il faudrait employer le procédé général du n° 385.

Pl. 28 374. PROBLÈME 4. *Soient* (I, I'I'') *l'axe d'une surface de révolution*, (Az, A'B'H'z'U') *la méridienne principale de cette surface; et soit* (MN, M'N') *une droite menée d'une manière quelconque par un point* (I, C) *de l'axe de révolution : on demande la courbe de contact d'une surface cylindrique dont les élémens soient parallèles à la droite donnée, et qui soit circonscrite à la surface de révolution.*

Nous ferons remarquer d'abord que ce problème n'est qu'un cas particulier du problème 5 du chapitre précédent (353). En effet, l'inconnue de ce dernier problème est la courbe de contact d'un cône qui touche et enveloppe la surface de révolution; or, si l'on suppose que le sommet de ce cône s'éloigne à l'infini, ce même cône se changera en un cylindre, et le problème à résoudre sera celui dont il s'agit. Pour en obtenir la solution, nous allons employer des procédés qui découlent, au moyen de modifications simples, de ceux qui ont servi à la résolution du problème 5 du chapitre II, et qui supposent que la surface donnée soit produite par le mouvement d'une enveloppée, conique, sphérique ou cylindrique (*voyez* les n[os] 354—362).

375. 1[er] *Procédé, dans lequel l'enveloppée est une surface conique.* Nous nous demanderons les points de la courbe cherchée qui sont sur une caractéristique (*oxhy*, *o'h'*), correspondante à l'enveloppée conique dont la génératrice est la tangente *h'a*. Concevons qu'on mène, par ces points, des plans tangens à la surface de révolution; ils seront tout-à-la-fois parallèles à la droite donnée, et tangens à l'enveloppée conique dont le centre est (I, *a*). Or, menons par ce centre une droite (I*d*, *ad'*) parallèle à (MN, M'N'); cette droite percera le plan *o'h'* de la caractéristique en un point (*d*, *d'*); et si par ce point on mène à cette caractéristique les tangentes *dx*, *dy*; qu'on détermine les points de contact *x* et *y*, et qu'on les mette en projection verticale en *x'* et *y'*, les points (*x*, *x'*), (*y*, *y'*), seront les points cherchés : car les plans tangens à l'enveloppée suivant ces points seront parallèles à la droite (MN, M'N'), et tangens à l'enveloppe.

En répétant ces constructions sur un nombre suffisant de caractéristiques,

on aura bientôt assez de points de la courbe cherchée pour pouvoir la décrire. Pl. 18.

Nous ferons remarquer que si la caractéristique $o'h'$ ne contenait aucun point de la courbe cherchée, le point (d, d') se trouverait dans l'intérieur du cercle $(oxhy, o'h')$, et réciproquement.

376. 2ᵉ *Procédé, dans lequel l'enveloppée est sphérique*. Cherchons les points de la courbe demandée qui sont sur la caractéristique $(pcl'el'', p'q')$, laquelle correspond à l'enveloppée sphérique dont le rayon est la normale $p'b$. Nous imaginerons qu'un cylindre parallèle à la droite donnée enveloppe la sphère dont le centre est (I, b) et le rayon $p'b$; ce cylindre la touchera suivant un cercle; ce cercle coupera la courbe $(pcl'el'', p'q')$ en deux points, et ces points seront les points cherchés : car ils seront tels que les plans tangens à la sphère qui leur correspondront seront à la fois parallèles à la droite donnée et tangens à l'enveloppe. Pour les déterminer, on fera tourner le méridien IN autour de l'axe de révolution jusqu'à ce qu'il vienne en IR; le point (N, N') de la droite $(MN, M'N')$ viendra en (R, R'); le point (I, C) de la même droite ne variera pas; donc cette droite viendra se rabattre en (IR, CR'). Le cylindre parallèle à cette même droite, et enveloppant la sphère, se trouvera projeté verticalement entre les droites $g'g$, $s's$, tangentes au cercle $p'gq's$, et parallèles à CR'; il touchera la sphère suivant une courbe dont la projection verticale sera la droite gs, qui joint les points de contact g et s; cette courbe et la caractéristique $(pcl'el'', p'q')$ se couperont suivant les deux points (l', l), (l'', l), qui, en supposant toujours que le méridien IN soit en IR, seront les points cherchés. Ramenons ce méridien dans sa première position; la droite $(l'l'', l)$ perce le plan IR, auquel elle est perpendiculaire, suivant le point u; ce point viendra en v; la droite $l'l''$ viendra en ec, et les points (l', l), (l'', l), se trouveront ramenés en (e, e') et (c, c') : ces derniers points seront par conséquent les points cherchés.

En répétant ces constructions sur de nouvelles caractéristiques, on obtiendra de nouveaux points de la courbe demandée, et bientôt on pourra la décrire.

Il est clair que si le plan $p'q'$ contient des points de cette courbe, les cordes $p'q'$, gs, se rencontreront; et que si elles ne se rencontrent pas, c'est que le plan $p'q'$ ne contiendra aucun de ces points.

377. 3ᵉ *Procédé, dans lequel l'enveloppée est cylindrique*. Cherchons les points de la courbe demandée qui sont sur la caractéristique située dans le méridien wIn. Pour cela, nous menerons parallèlement à la droite (MN,

Pl. 28. M'N'), deux plans tangens à l'enveloppée cylindrique qui passe par la méridienne wn; ces deux plans toucheront à la fois cette enveloppée et la surface donnée suivant deux points de cette méridienne, et ces deux points seront les points cherchés. Or, les plans tangens dont il s'agit contiendront chacun un élément de l'enveloppée cylindrique; et comme tous les élémens de cette enveloppée sont perpendiculaires au plan wn, ces plans tangens seront aussi perpendiculaires à ce plan; donc tout ce qu'ils contiendront se projettera sur wn, suivant leurs traces sur ce même plan : mais ils contiendront chacun une parallèle à la droite donnée; donc leurs traces sur le plan wn seront des parallèles à la projection de (MN, M'N') sur le plan wn. D'un autre côté, ces traces seront nécessairement des tangentes à l'intersection de l'enveloppée cylindrique et du plan wIn, c'est-à-dire à la méridienne wIn; donc les points de contact de ces tangentes seront ceux où l'enveloppée et l'enveloppe seront à la fois touchées par les plans tangens en question : donc ces points sont ceux que nous voulons construire. Il est, d'après cela, aisé de les trouver.

Projetons d'abord la droite donnée sur le plan méridien In; le point (I, C) sera lui-même sa projection, et le point (N, N') se projettera dans la verticale N, à une hauteur NN' au-dessus du plan horizontal. Rabattons le méridien In sur IR, le point (I, C) ne bougera pas dans le mouvement, la projection du point (N, N') viendra en (P, P'), la projection de la droite donnée se trouvera par conséquent rabattue en CP', et la méridienne wn se trouvera coïncider avec la méridienne principale (SR, A'B'H'z'U'). Nous menerons à cette méridienne des tangentes Qr', Qk', parallèles à P'C; nous déterminerons leurs points de contact r' et k'; nous les mettrons en projection horizontale en r et k sur le méridien SR; nous ramenerons ensuite ce méridien dans sa position primitive wn, les points (r, r'), (k, k'), viendront se placer en (t, t') et (m, m'), et ces derniers points, d'après ce que nous avons dit, seront les points cherchés.

Au moyen de ces constructions, on pourra facilement déterminer un assez grand nombre de points de la courbe demandée pour pouvoir la décrire.

Il est évident que ce procédé donnera, pour chaque caractéristique, autant de points de la courbe cherchée qu'il sera possible de mener de tangentes à cette caractéristique, parallèlement à la projection de la droite donnée.

378. *Construction des points singuliers de la courbe demandée.* Les pro-

cédés que l'on vient d'exposer, suffisent, chacun en particulier, pour déterminer la courbe demandée; mais, parmi les points de cette courbe, il y en a de remarquables qu'il est bon de construire de préférence à tous les autres. Pl. 28.

Menons, parallèlement à la droite MN, les tangentes FE, GD, au contour AEzD de la projection horizontale de la surface donnée; les droites FE, GD, seront les projections horizontales des deux plans verticaux tangens à la surface donnée : donc les points de contact (E, E'), (D, D'), qu'ils détermineront sur le contour (AEzD, A'z'), appartiendront à la courbe cherchée.

Si nous menons pareillement les droites TB', *fi'*, tangentes au contour A'B'H'*q*'U' de la projection verticale de la surface donnée, et parallèles à la droite M'N', ces tangentes détermineront deux points de contact B' et *i'*, qui, étant rapportés en projection horizontale en B et *i*, donneront deux points (B, B'), (*i*, *i'*), de la courbe cherchée.

379. Enfin, construisons les points de cette même courbe qui sont situés dans le méridien MIN. Ces points seront ceux où la méridienne MN sera touchée par deux droites parallèles à (MN, M'N'); ainsi, les constructions à faire seront toutes dans le plan MIN. Ramenons ce plan en SIR; le point (N, N') viendra en (R, R'); la droite donnée viendra en (IR, CR'); et en menant par cette droite les tangentes XH', LU', elles détermineront deux points de contact (H, H'), (U, U'), qui, ramenés en (K, K') et (V, V'), dans le méridien MIN, seront les points cherchés.

380. Ces points (K,K'), (V, V'), seront élevés au-dessus du plan horizontal de hauteurs qui, par rapport à celles des autres points de la courbe demandée, seront des maximum ou des minimum (359 note). Pour le démontrer, comparons les hauteurs des points (*t*, *t'*), (*m*, *m'*), situés dans le méridien quelconque *wn*, à celles des points en question (K, K'), (V, V'). Les uns et les autres sont donnés par le contact de la méridienne avec de certaines tangentes XH', LU', Q'*k'*, Q*r'*. Or, parmi ces tangentes, les deux premières font avec le plan horizontal l'angle de la droite donnée et de ce même plan, et l'angle des dernières est celui du plan horizontal et de la projection de la droite donnée sur le plan méridien *wn* : mais, quel que soit le méridien *wn*, le premier de ces angles sera plus grand que le dernier; donc toutes les tangentes, telles que Q'*k'*, ont pour limite XH'; toutes les tangentes, telles que Q*r'*, ont pour limite LU' : donc les hauteurs des points de contact H' et U' sont des maximum ou des minimum par rapport à celles des points *k'* et *r'*. Donc, etc.

381. Il suit de là (360) que les tangentes de la courbe cherchée, en

Pl. 28. (V, V') et (K, K'), sont des droites dont les projections horizontales sont perpendiculaires à MN, et dont les projections verticales sont parallèles à la ligne de terre.

Il est évident que les droites FE, GD, sont tangentes à la projection horizontale de la courbe cherchée (361), et que les droites TB', *fi'*, sont tangentes à sa projection verticale (361); donc les six points singuliers (*) (K, K'), (V, V'), (B, B'), (*i*, *i'*), (E, E'), (D, D'), sont tels qu'on connaît, pour les deux premiers, les tangentes de la courbe cherchée; pour le 3ᵉ et le 4ᵉ, les projections verticales de ces tangentes; enfin, pour le 5ᵉ et le 6ᵉ, les projections horizontales des mêmes tangentes.

Ces six points et les points (x, x'), (y, y'), (c, c'), (e, e'), (t, t'), (m, m'), déjà déterminés, pourront suffire aux personnes habituées aux opérations de la Géométrie descriptive pour décrire la courbe demandée (EVDK, E'V'D'K').

382. *Exécution de l'épure.* On voit clairement que l'arc (EKD, E'K'D') de la courbe demandée, auquel appartient le point superieur (K, K'), situé sur le dessus de la surface, est vu en projection horizontale; et que l'arc (EVD, E'V'D'), auquel appartient le point inférieur (V, V'), n'est pas vu. En projection verticale, l'arc vu (BE*i*, B'E'*i'*) contient le point singulier (E, E'), qui est sur la partie antérieure de la surface; et l'arc non vu (BD*i*, B'D'*i'*) contient le point caché (D, D').

383. On remarquera que les arcs vus et cachés sont toujours séparés par des points singuliers (E, E'), (B, B'), (D, D'), (*i*, *i'*); ainsi, c'est une nouvelle raison de déterminer ces points.

384. **Problème 5.** *Étant données une surface gauche et une droite, mener un plan tangent à cette surface parallèlement à la droite donnée.*

Si par un élément quelconque de la surface gauche on mène un plan parallèle à la droite donnée, ce plan sera tangent en un point de cette surface (245).

Il suit de là que le problème proposé aura une infinité de solutions. Il sera facile d'en trouver autant qu'on en voudra, et de déterminer les points de contact de celles qu'on aura construites (245); et si l'on mène une ligne par ces points, cette ligne sera la courbe de contact de la surface donnée et d'un cylindre enveloppant, parallèle à la droite donnée.

385. **Problème général.** *Mener parallèlement à une droite donnée, un plan tangent à une surface connue quelconque.*

(*) Ils pourraient être en plus grand ou en moindre nombre sur un autre exemple.

On menera parallèlement à la droite donnée un plan quelconque, assujetti seulement à couper la surface donnée; on déterminera l'intersection commune de ce plan et de la surface; on menera parallèlement à la droite donnée une tangente à cette intersection (*); on déterminera le point de contact de cette tangente; par ce point on menera un plan tangent à la surface donnée, et ce plan sera évidemment une solution du problème proposé.

386. Il est clair que le nombre des solutions semblables, que l'on pourra déterminer, sera en général infini. Si l'on construit les points de contact correspondans à plusieurs de ces solutions, et que l'on joigne ces points par une ligne, cette ligne sera la courbe de contact de la surface donnée et d'un cylindre enveloppant, dont les élémens seront dirigés parallèlement à la droite donnée.

387. Si la droite donnée était perpendiculaire à l'un des plans de projection, au plan horizontal par exemple, cette courbe de contact aurait pour projection horizontale le contour de la projection horizontale de la surface donnée, et la courbe de contact diviserait cette surface, ainsi que nous l'avons vu précédemment (158), en deux parties, l'une vue sur le plan horizontal, et l'autre cachée. D'après cela, on aura toujours un moyen de déterminer les contours des projections d'une surface, et les lignes de cette surface correspondantes à ces contours.

388. Si la surface donnée est une surface développable, la courbe de contact en question sera remplacée par un ou plusieurs élémens de cette surface, et les solutions du problème seront en nombre fini; car tous les plans tangens suivant les points d'un même élément formeront un seul et même plan. Les problèmes 1 et 2 de ce chapitre en fournissent des exemples.

CHAPITRE IV.

Des plans tangens menés par une droite donnée.

389. Nous ferons d'abord remarquer que si la surface donnée était une surface développable, il n'y aurait pas en général de plan tangent à cette surface, passant par la droite donnée. En effet, chaque plan tangent d'une surface développable est une position du plan mobile générateur de cette

(*) Cette tangente peut toujours être menée par le procédé du n° 122; car pour appliquer ce procédé, il suffit de savoir mener les tangentes à la courbe quand les points de contact sont donnés : or c'est ce qu'on sait dans les cas dont il s'agit, puisque la tangente en un point de l'intersection n'est autre chose que la section faite sur le plan tangent en ce point par le plan auxiliaire (152).

surface (255); donc il faudrait, pour qu'elle eût un plan tangent passant par la droite donnée, qu'il y eût une des positions du plan mobile générateur qui contînt justement la droite donnée : or, cette droite est une droite quelconque; donc elle ne doit avoir qu'un point de commun avec chaque position du plan mobile; donc, etc.

390. Pour éclaircir ceci, supposons que la surface donnée soit cylindrique ou conique. Si elle est conique, tous les plans tangens passeront par son sommet, et le plan demandé devra contenir à la fois ce sommet et la droite donnée; donc il sera entièrement déterminé : donc on ne pourra pas lui imposer la condition d'être tangent à la surface du cône (*). Si la surface donnée est cylindrique, tous ses plans tangens seront parallèles à sa génératrice; donc si l'on mène par la droite donnée un plan parallèle à l'un des élémens de cette surface, ce plan sera le plan cherché : mais il est clair qu'il se trouve déterminé sans qu'on ait fait entrer en considération la condition qu'il soit tangent à la surface cylindrique; donc en général il ne satisfera pas à cette condition.

D'après cela, les questions qui vont nous occuper ne devront s'appliquer qu'à des surfaces non développables.

391. **Problème 1er**. *Par une droite donnée, mener un plan tangent à une surface sphérique.*

Ce problème aura évidemment deux solutions. Pour les trouver, on menera par le centre de la sphère un plan perpendiculaire à la droite donnée; il coupera cette droite en un point, et la sphère suivant un grand cercle; on menera par ce point deux tangentes à ce cercle, et si, par chaque tangente et par la droite donnée, on mène un plan, les deux plans qu'on obtiendra seront tangens à la sphère suivant les points de contact des tangentes; c'est-à-dire qu'ils seront les plans tangens demandés. En effet, tout plan tangent en un point d'une sphère est perpendiculaire à l'extrémité du rayon qui correspond à ce point, et réciproquement (**) : or, imaginons qu'on abaisse du centre de la sphère une perpendiculaire sur chacun des plans obtenus; ces perpendiculaires ne

(*) Nous pourrions dire qu'on ne pourra pas imposer à ce plan la condition d'être autrement tangent à la surface du cône; car tout plan mené par le sommet d'un cône peut être considéré comme tangent à ce cône (411).

(**) Cette propriété est facile à démontrer; car si l'on conçoit par le rayon d'une sphère une infinité de plans, ils couperont la sphère suivant des cercles qui se croiseront par l'ex-

sortiront pas du plan du grand cercle employé; car ce plan est perpendiculaire aux deux plans obtenus : mais les tangentes menées sont les intersections de ces deux plans et du grand cercle; donc les perpendiculaires abaissées seront à angle droit sur ces tangentes; donc elles auront respectivement pour pieds les points de contact de chacune de ces mêmes tangentes; donc elles seront, dans la sphère, des rayons aux extrémités desquels les plans obtenus seront perpendiculaires : donc ces plans seront tangens à cette sphère.

392. Appliquons maintenant le procédé qui vient d'être décrit. Soit (C, C′) le centre de la sphère, *gbk*, *pqx*, les contours de ses projections, et (AB, A′B′) la droite donnée. Le plan mené par le point (C, C′), perpendiculairement à cette droite, aura ses traces respectivement perpendiculaires aux lignes AB, A′B′ (66); donc, si l'on mène par ce point deux droites l'une horizontale (C*e*, C′*e*′) dont la projection C*e* soit perpendiculaire à AB, et l'autre (C*a*, C′*a*′) dont la projection C*a* soit parallèle à la ligne de terre, et dont la projection C′*a*′ soit perpendiculaire à A′B′, elles seront toutes deux comprises dans ce plan et le détermineront. La première (C*e*, C′*e*′) percera le plan vertical AB en (*e*, *e*′); la seconde (C*a*, C′*a*′) le percera en (*a*, *a*′); ainsi, le plan de ces deux droites et le plan vertical AB se couperont suivant la droite (*ae*, *a*′*e*′). Cette droite et la droite donnée (AB, A′B′) ont même projection horizontale; donc elles se coupent au point (I, *i*), qui a pour projection verticale l'intersection *i* des projections *a*′*e*′, A′B′, de ces droites. D'après cela, le point (I, *i*) appartient à la fois à la droite (AB, A′B′) et au plan des droites (C*e*, C′*e*′), (C*a*, C′*a*′), c'est-à-dire qu'il est l'intersection de la droite donnée et du plan mené par le point (C C′) perpendiculairement à cette droite. Pl. 29.

Or, suivant ce que nous avons dit, il faudra maintenant mener par le point (I, *i*) des tangentes au grand cercle intersection de la sphère et du plan des droites (C*e*, C′*e*′), (C*a*, C′*a*′). Pour trouver ces tangentes, rabattons ce plan sur le plan horizontal C′*r*′, en le faisant tourner autour de la droite (C*e*, C′*e*′) : il est clair que le grand cercle, intersection de la sphère, se rabattra sur *gbk*; et que le point (I, *i*), après avoir décrit un arc de cercle dont le centre est (*e*, *e*′), et dont le rayon est l'hypo-

---

trémité du rayon, perpendiculairement à ce rayon; d'où l'on voit que les diverses facettes d'une sphère sont perpendiculaires aux rayons correspondans.

Pl. 29. ténuse *hi*, d'un triangle rectangle *lhi*, tel que *lh* = *le*, viendra se rabattre en D. Si donc on mène par le point D les droites D*d*, D*g*, tangentes au cercle *gbk*, il ne s'agira plus que de donner au système du point D et de ces tangentes un mouvement de rotation qui ramène le point D en (I, *i*), et les positions que prendront ces mêmes tangentes seront dans les plans cherchés. Chaque point du système décrira, dans le mouvement, un cercle perpendiculaire à la charnière (C*r*, C'*r*'); donc le point de contact *d* ne sortira pas du plan *dm*, perpendiculaire à C*r*, ni le point *g* du plan *gn*, parallèle à *dm* : mais les points (*o*, *o*'), (*r*, *r*'), des tangentes D*d*, D*g*, sont sur l'axe de rotation (C*r*, C'*r*'); donc ils ne bougeront pas dans le mouvement; donc la droite D*od* viendra se placer en (I*om*, *io*'*m*'), et la droite *r*D*g* en (*r*I*n*, *r*'*in*'); donc le point de contact *d* viendra se projeter horizontalement en *m* et verticalement en *m*'; et le point de contact *g*, horizontalement en *n* et verticalement en *n*'.

Il suit de là que l'un des plans tangens demandés passera par la droite (I*m*, *im*'), et l'autre par la droite (I*n*, *in*') : ils contiendront d'ailleurs tous deux la droite (AB, A'B'), et ils auront pour points de contact, le premier le point (*m*, *m*'), et le second le point (*n*, *n*'). Il sera aisé de construire leurs traces. Pour cela, on menera par les points de contact (*m*, *m*'), (*n*, *n*'), des parallèles (*ms*, *m*'*s*'), (*nu*, *n*'*u*'), à la droite donnée (AB, A'B') : la première parallèle (*ms*, *m*'*s*') percera le plan horizontal en (*s*, *s*'), et le plan vertical en (*t*, *t*'); la droite donnée perce les mêmes plans de projection en (A, A') et (L, L'); donc celui des plans demandés dont (*m*, *m*') est le point de contact aura pour trace horizontale la droite A*s*P, et pour trace verticale la droite RL'*t*'. La seconde parallèle (*nu*, *n*'*u*') percera le plan horizontal en (*v*, *v*'), et le plan vertical en (*u*, *u*'); donc le plan tangent dont (*n*, *n*') est le point de contact aura pour trace horizontale la droite TA*v*, et pour trace verticale la droite L'*u*'U : donc enfin, les plans (PQ, QR), (TS, SU), sont les deux plans demandés.

393. Ayant obtenu les points de contact (*m*, *m*'), (*n*, *n*'), on aurait pu mener par ces points les rayons correspondans de la sphère, et comme les plans demandés sont perpendiculaires à ces rayons, on aurait déterminé leurs traces par la condition qu'elles fussent respectivement perpendiculaires aux projections des mêmes rayons.

On fera remarquer que la corde *dg*, menée par les points de contact *d* et *g* des tangentes D*d*, D*g*, coupe la charnière C*r* en un point qui

ne doit pas varier dans le mouvement des tangentes autour de cette charnière : donc les positions *dg* et *mn* de cette corde doivent couper C*r* en un même point. Pl. 29.

394. *Exécution de l'épure.* La sphère est comprise entre les deux plans tangens demandés, et il est aisé de voir qu'elle est au-dessous de celui (TS, SU), qui passe par le point (*n*, *n'*), et derrière celui (PQ, QR), qui passe par le point (*m*, *m'*); donc les contours *gbk*, *pqx*, des projections de cette sphère, ne sont pas vus.

En examinant la projection horizontale de l'épure, on voit que le plan tangent (TS, SU) couvre toute la partie du plan horizontal située du côté C de TS, et que le plan tangent (PQ, QR) couvre toute la partie du même plan située du côté *r* de PQ; donc il n'y a que la partie QASQ du plan horizontal qui soit vue. La ligne AP est sous le plan (TS, SU); ainsi, elle est cachée. La ligne AT est sous le plan (PQ, QR); donc elle est pareillement cachée. Quant aux parties AS, AQ, des traces TS, PQ, elles sont évidemment vues, ainsi que la projection AB de l'intersection des deux plans demandés.

En projection verticale, la partie du plan (TS, SU), qui se projette horizontalement dans l'angle TAB, et celle du plan (PQ, QR), qui se projette horizontalement dans l'angle BAP, couvrent évidemment tout le plan vertical et cachent tout ce qu'il contient. Il résulte de là que les traces SU, QR, ne sont pas vues, et qu'il ne doit y avoir de lignes pleines, sur le plan vertical, que la projection A'B' de l'arête (AB, A'B'), suivant laquelle se joignent dans l'espace les deux parties des plans demandés qui se projettent sur le plan horizontal en TAB et BAP.

Il n'est pas nécessaire d'ajouter que les lignes AL, A'L', S*v*, SL', Q*t*', qui sont sur les parties postérieure et inférieure des deux plans de projection, ne sont pas vues.

395. PROBLÈME 2. *Par une droite donnée, mener un plan tangent à une surface de révolution.*

Nous allons donner deux solutions de ce problème.

396. 1re *Solution, dans laquelle on emploie des cônes auxiliaires.* Concevons deux points sur la droite donnée, et imaginons que chacun de ces points soit le sommet d'un cône circonscrit à la surface de révolution. Cette surface sera touchée par chacun de ces cônes suivant une courbe de contact facile à déterminer (353), et le point d'intersection des deux courbes de contact sera le point de contact du plan tangent demandé; car le

plan tangent en ce point à la surface donnée passera par chacun des sommets des deux cônes auxiliaires; d'où l'on voit qu'il contiendra la droite donnée tout entière.

Il suit de là que le problème proposé aura autant de solutions que les deux courbes de contact des deux cônes auxiliaires auront de points communs.

Pl. 30. 397. Soit donc (I, I'I") l'axe de révolution, (GH, *v'it'k*) la méridienne principale de la surface donnée, et (CD, C'D') la droite donnée. Il est clair que le problème aura deux solutions. Pour les déterminer avec exactitude, nous ferons remarquer avant tout que si les sommets des deux cônes auxiliaires étaient très voisins l'un de l'autre, les courbes de contact correspondantes se croiseraient sous des angles très aigus, d'où il résulterait nécessairement que les points d'intersection de ces courbes ne seraient pas bien distincts (907). Il est aisé de sentir, d'après cela, que les points de la droite (CD, C'D'), qu'il est convenable de choisir pour ces sommets, doivent donner des courbes de contact à peu de chose près rectangulaires entre elles : or, on ne sera pas loin de satisfaire à cette condition, si l'on prend l'un des sommets en un point (D, D') très voisin de la surface donnée, et l'autre à l'infini sur la droite (CD, C'D').

398. Le cône dont le sommet sera en (D, D') touchera la surface de révolution suivant une courbe (*mrns*, *m'r'n's'*), que l'on déterminera par les moyens exposés précédemment (353).

Le cône dont le sommet sera situé à l'infini sur la droite (CD, C'D') aura ses élémens parallèles à cette droite; ainsi, ce ne sera pas, à proprement parler, un cône, mais bien un cylindre. Il touchera la surface de révolution suivant la ligne (*mtunv*, *m't'u'n'v'*), que l'on construira facilement par les procédés des nos 375, 376 et suivans.

Ayant déterminé les deux courbes (*mrns*, *m'r'n's'*), (*mtunv*, *m't'u'n'v'*), on remarquera qu'elles se coupent aux deux points (*m*, *m'*), (*n*, *n'*), et l'on en conclura que ces points sont ceux de contact des deux plans tangens demandés. Il aurait été facile d'obtenir les traces de ces plans; mais, pour que l'épure soit moins confuse, on s'est dispensé de les construire.

399. Comme les projections des courbes de contact (*mrns*, *m'r'n's'*), (*mtunv*, *m't'u'n'v'*), ne se croisent pas seulement suivant les projections *m*, *n*, *m'*, *n'*, de leurs intersections, il est nécessaire d'établir quelques règles pour que l'on sache trouver aisément les points cherchés *m* et *n*, *m'* et *n'*, parmi les différens points de rencontre *m*, *y*, *n*, *x*, *m'*, *w*, *n'*, *z*, des lignes *mrns*, *m'r'n's'*, *mtunv*, *m't'u'n'v'*. D'abord nous ferons remarquer que pour qu'un point *m* soit la projection d'un des points de contact des plans demandés, il faut qu'il ait un correspondant *m'* sur l'autre projection. Et comme il faut de plus que le point (*m*, *m'*) soit l'intersection de deux arcs (*vmt*, *v'm't'*), (*smr*, *s'm'r'*), des courbes de contact, il est indispensable que ces arcs soient sur une même portion de la surface donnée; d'où l'on voit que ces mêmes arcs, à l'endroit du point (*m*, *m'*), doivent être sur chaque projection tous deux vus ou tous deux cachés. D'après cela, les points *x*, *y*, *z*, *w*, où se coupent des arcs pleins et des arcs ponctués des deux lignes (*mrns*, *m'r'n's'*), (*mtunv*, *m't'u'n'v'*), ne peuvent être les projections des points cherchés, ce qui, dans le cas actuel, fait connaître immédiatement ces points, et, dans tout autre cas, facilite infiniment leur détermination.

400. La surface prise pour exemple offre des propriétés intéressantes; parce qu'elle

est de l'espèce des ellipsoïdes de révolution, et que toute surface conique ou cylindrique, qui enveloppe un ellipsoïde, le touche suivant une courbe plane elliptique (*) dont chaque projection est toujours une ellipse (589). Cela posé, prenons pour sommet d'un cône auxiliaire le point (G, G'), où la droite donnée (CD, C'D') traverse le méridien GH. Ce méridien divise la surface de révolution en deux parties symétriques; donc le cône qui aura son sommet dans le même méridien sera aussi divisé par le plan GH en deux parties symétriques; donc la courbe de contact correspondante à ce cône sera également divisée par le même plan en deux parties symétriques; donc le méridien GH contiendra l'un des axes de cette courbe de contact; donc elle aura son plan perpendiculaire au plan vertical: donc enfin elle sera projetée verticalement suivant une droite *i*K. Il sera facile d'obtenir cette droite; car si l'on mène par le point G' deux tangentes G'*i*, G'*k* à la méridienne *v'i'l'k*, elles toucheront cette méridienne en deux points *i* et *k*, qui seront des points de la droite cherchée. Or, la surface conique dont le sommet est en (G, G') touche la surface donnée suivant une courbe à laquelle appartiennent les points (*m*, *m'*), (*n*, *n'*); donc la projection *ik* de cette courbe doit contenir les points *m'* et *n'*, ce qui fournit un moyen simple de vérifier l'exactitude des constructions précédentes. Pl. 30.

Si l'on prend pour sommet d'un cône auxiliaire le point (K, K'), où la droite donnée perce le plan horizontal K'L, qui divise la surface de révolution en deux parties symétriques, la courbe de contact correspondante aura pour projection horizontale une droite *qd*, passant par les points *m* et *n*, et l'on aura un second moyen, analogue au premier, de vérifier les positions des points (*m*, *m'*), (*n*, *n'*).

401. Il est clair que les courbes de contact *qd* et *ik* auront pour secondes projections deux ellipses: d'où l'on voit que si l'on prend pour sommets des deux cônes auxiliaires les points (G, G'), (K, K'), on aura deux droites et deux ellipses à déterminer, au lieu de quatre ellipses, ce qui simplifiera beaucoup les constructions.

Si la surface donnée est un hyperboloïde de révolution à deux nappes, un hyperboloïde de révolution à une nappe, ou un paraboloïde elliptique de révolution, il y aura des cônes auxiliaires, analogues à ceux dont les sommets sont les points (K, K') et (G, G'), et l'emploi de ces cônes simplifiera beaucoup la résolution du problème proposé.

402. *Exécution de l'épure.* La distinction des parties pleines et ponctuées est d'une grande importance; mais, comme elle est exposée avec détail aux n[os] 363 et 382, nous renvoyons à ces numéros.

L'ellipsoïde donné est le même que sur les planches 26 et 28; la droite (CD, C'D') est parallèle à la droite (MN, M'N') de la pl. 28, et le sommet (D, D') est le même que le sommet (M, N), pl. 26, en sorte qu'on n'a eu besoin, pour faire l'épure de la pl. 30, que de rapporter sur cette épure les résultats obtenus pl. 26 et pl. 28.

403. 2[e] *Solution, dans laquelle on emploie un hyperboloïde de révolution à une nappe.* Imaginons que la droite donnée se meuve autour de l'axe de révolution pour engendrer un hyperboloïde, et concevons par le point de

(*) *Voyez*, pour l'intelligence de ce numéro et du suivant, les Traités de l'application de l'Analyse à la Géométrie des trois dimensions.

contact du plan tangent demandé un plan méridien; ce dernier plan coupera la droite donnée en un point, et je dis que le plan tangent demandé sera tangent en ce point à l'hyperboloïde. En effet, puisque ce plan est le plan demandé, il passe par la droite donnée, c'est-à-dire par l'élément de l'hyperboloïde qui contient le point d'intersection de cette droite et du plan méridien; mais il est perpendiculaire à ce plan comme étant tangent à la surface donnée (294) : donc il est tangent à l'hyperboloïde en ce point d'intersection (306).

Il suit de là que si l'on mène un plan tangent par l'axe de révolution et par le point de contact du plan demandé et de la surface donnée, ce plan coupera cette surface et celle de l'hyperboloïde, chacune, suivant sa méridienne, et le plan tangent suivant une droite tangente aux deux méridiennes. Si donc on construit les méridiennes principales de ces deux surfaces, qu'on leur mène une tangente commune, et qu'on fasse tourner cette tangente autour de l'axe de révolution, elle viendra rencontrer la droite donnée en un point, elle appartiendra, dans la position où elle sera parvenue, au plan tangent demandé, et le point où elle touchera la méridienne de la surface donnée sera le point de contact de ce plan. Dès que ce point sera connu, il sera facile d'en déduire le plan tangent cherché.

Pl. 31. 404. Soit (I, I'I'') l'axe de révolution, (*gh*, *a'b'c*) ou (*ik*, *fd'e'*), la méridienne principale de la surface donnée, et (CD, C'D') la droite par laquelle il s'agit de mener le plan tangent demandé.

Il est clair que le problème aura plusieurs solutions. Nous allons opérer, pour les trouver, comme il vient d'être dit; ainsi, nous chercherons d'abord la méridienne principale de l'hyperboloïde dont la droite (CD, C'D') est la génératrice. Pour cela, nous suivrons les procédés indiqués n° 200; nous remarquerons qu'un point quelconque (C, C') de cette droite engendre un cercle horizontal (CFAG, F'G'), qui est coupé par le méridien *gk* en deux points (F, F'), (G, G'), de la courbe cherchée; nous opérerons de la même manière sur d'autres points de (CD, C'D'), et bientôt nous pourrons décrire la projection verticale F'H'B', G'K'L', de la méridienne principale de l'hyperboloïde. Ensuite, il s'agira de mener une droite à la fois tangente à cette méridienne et à la méridienne donnée *a'b'c*, *fd'e'* (*voyez* la Note 6). Au lieu d'une, il est visible qu'on en pourra mener quatre, savoir : *a'*B', *b'*H', *d'*K', *e'*L'. Ne nous occupons maintenant que de la première *a'*B'.

Concevons par cette tangente un plan perpendiculaire au méridien FG;

ce plan sera tangent à la surface donnée en (a, a'), et à l'hyperboloïde en (B, B'). Or, si l'on fait prendre à la tangente a'B', ou (FG, a'B'), un mouvement circulaire autour de l'axe (I, I'I''), et qu'on suppose que cette tangente emmène avec elle le plan a'B', ce plan, dans son mouvement, ne cessera pas d'être tangent aux deux surfaces en question, suivant les positions qu'occuperont successivement les deux points (B, B'), (a, a'). Mais une des positions du premier de ces points se trouvera en (E, E') sur la droite donnée; la position correspondante de la tangente (FG, a'B') se trouvera dans le plan méridien EI; donc la position correspondante du point (a, a') sera en (P, P') : donc le plan mobile touchera la surface donnée en (P, P'), et l'hyperboloïde en (E, E'). Et comme il ne peut toucher l'hyperboloïde sans passer par la génératrice correspondante (CD, C'D'), il coïncidera avec le plan demandé; donc enfin (P, P') est le point de contact de ce plan. Pl. 31.

La tangente b'H' conduira à une seconde solution. Pour la déterminer, on amenera le point (H, H') en (N, N') sur la droite donnée, au moyen d'un arc de cercle horizontal (HN, H'N'), dont le centre sera en (I, M); on menera la trace IN du méridien qui contient le point (N, N'); on amenera le point de contact (b, b') dans ce méridien, au moyen de l'arc (bS, b'S'), et le point (S, S') sera le point de contact d'un second plan tangent à la surface donnée, passant par (CD, C'D').

Quant aux tangentes d'K', e'L', il est évident qu'elles seront symétriques aux tangentes b'H', a'B'. Il s'ensuit que les points de contact B' et L', b' et d', a' et e', H' et K', seront dans les mêmes plans horizontaux B'L', $b'd'$, $a'e'$, H'K', et à des distances égales de l'axe de révolution; d'où l'on voit que lorsqu'on ramenera les points (K, K') et (L, L') sur la droite donnée, ils viendront se placer respectivement en (N, N') et (E, E'), et les points de contact (d, d'), (e, e'), aux points déjà obtenus (S, S') et (P, P'), en sorte que les tangentes d'K', e'L', donneront les mêmes solutions que les tangentes b'H', a'B'. Malgré cela, il conviendra de mener toutes ces tangentes, parce que la condition qu'elles soient symétriques deux à deux, ainsi que leurs points de contact, fournira le moyen de vérifier l'exactitude des résultats obtenus à gauche de l'axe I'I'', par la confrontation de ceux obtenus à droite.

Nous n'avons pas mené les traces des deux plans cherchés; on connait pour chacun d'eux un point et une droite qu'ils contiennent, ainsi ils sont déterminés.

PL. 31. 405. Cette solution, plus expéditive que la première, est d'une exécution assez délicate, parce qu'on n'a pas de méthode graphique simple pour mener les droites $a'B'$, $b'H'$, tangentes à deux courbes connues, et pour déterminer leurs points de contact a', B', b', H'; mais elle se recommande par son élégance, et elle conduit d'ailleurs aussi sûrement qu'une autre à des résultats exacts, lorsque l'on dessine avec soin.

406. *Exécution de l'épure.* La surface prise pour exemple est engendrée par un cercle; elle a la forme d'un anneau et appartient à la variété de surfaces de révolution que l'on appelle surfaces *annullaires* (301).

La recherche des lignes pleines et ponctuées ne présente aucune difficulté. On a tracé la méridienne F'H'B', L'K'G', au moyen d'élémens rectilignes interrompus, parce que l'hyperboloïde employé ne fait partie ni des données ni des résultats du problème.

407. *Problème général. Étant données une droite quelconque et une surface quelconque, on demande le plan tangent à la surface donnée, passant par la droite donnée.*
Il y a deux procédés généraux pour résoudre ce problème.

408. Le premier consiste à circonscrire à la surface donnée deux cônes qui aient leurs sommets sur la droite donnée : il est clair que le plan demandé, aura son point de contact à l'intersection des courbes de contact de ces deux cônes; donc il suffira de déterminer ces courbes (367) et le point où elles se couperont, pour avoir le plan tangent demandé. On a vu précédemment un exemple de cette solution (396).

409. Voici en quoi consiste le second procédé qui conduit à la solution. Nommons D la droite donnée, S la surface donnée, et P un plan, perpendiculaire à la droite D, sur lequel on fera une projection auxiliaire. On commencera par construire le plan P, et le point d, où la droite donnée se projettera sur ce plan; on déterminera ensuite la courbe de contact Y d'un cylindre parallèle à la droite D et enveloppant la surface S (386); on construira la courbe y, projection de Y sur le plan P; enfin, on menera, par le point d, une tangente φ à la courbe y, et cette tangente sera la trace et la projection du plan tangent demandé. En effet, la ligne y sera le contour de la projection de la surface donnée sur le plan P; donc le plan φ n'aura de commun avec cette surface que la facette infiniment petite qui se projettera sur le plan P suivant l'élément linéaire infiniment petit commun à la courbe y et à la tangente φ; donc, etc. Connaissant la droite φ, on trouvera aisément les traces horizontale et verticale du plan tangent demandé.

Ce moyen de solution, sauf quelques légères modifications, est celui qu'on a employé (391) pour mener par une droite donnée un plan tangent à la sphère.

410. Si la surface donnée était une surface développable, la ligne y serait une ligne droite, ou le système de plusieurs lignes droites, et il ne serait pas possible de mener la tangente φ; donc il n'est pas possible de mener par une droite donnée un plan tangent à une surface développable. C'est une vérité précédemment démontrée (389).

La surface donnée étant toujours une surface développable, si l'on veut employer le

moyen des cônes auxiliaires (408), on trouvera, pour lignes de contact, des élémens indéfinis de la surface ; en général, ces élémens ne se rencontreront pas, d'où l'on voit que l'on sera conduit à la conclusion précédente, qui est que, dans l'hypothèse faite, le problème proposé est impossible.

411. Si cependant la surface donnée était un cône, les lignes de contact se couperaient suivant son sommet ; d'où il suit que le plan mené par la droite donnée, et par ce sommet, serait tangent au cône suivant ce même sommet. Et, comme la droite donnée est une droite quelconque, il faut tirer de là cette conséquence, que tout plan passant par le sommet d'une surface conique est tangent à cette surface. Cette vérité singulière se trouve expliquée note 5, n° 902.

CHAPITRE V.

Des plans tangens à plusieurs surfaces.

412. Il est facile de concevoir qu'un plan ne peut être assujetti à toucher plus de trois surfaces données ; ainsi, comme nous savons mener un plan tangent à une surface isolée, par un de ses points, par un point quelconque, parallèlement à une droite donnée, et par une droite donnée, il ne nous restera plus à parler que des plans tangens à deux et à trois surfaces.

413. *Problème 1er. Étant données deux surfaces quelconques, on demande un plan qui les touche à la fois toutes les deux.*

Soient S et *s* les deux surfaces données ; on menera dans l'espace un plan quelconque P ; on déterminera les courbes de contact Δ et Ω des deux surfaces S et *s* avec deux surfaces cylindriques enveloppantes dont les élémens soient perpendiculaires au plan P (386). Cela fait, on construira les lignes δ et ω suivant lesquelles les courbes Δ et Ω se projetteront sur le plan P ; on menera une tangente commune φ à ces deux lignes (903), et cette tangente sera, sur le plan P, la trace et la projection du plan tangent demandé. En effet, les élémens linéaires communs entre les courbes δ et ω, et leur tangente φ, sont les projections de facettes infiniment petites des deux surfaces données, communes à ces surfaces et au plan φ ; donc ce plan sera tangent aux surfaces S et *s* : donc, etc.

Connaissant la situation du plan φ par rapport au plan P, on déterminera facilement les traces du premier de ces plans.

414. Comme le plan P est entièrement quelconque ; il est clair que le problème proposé aura en général une infinité de solutions. Ces solutions ont un lien commun, et ce lien est la surface développable qui enveloppe les deux surfaces données : car tout plan tangent aux surfaces S et *s* est l'enveloppée de la surface développable dont il s'agit ; en

sorte que tout plan tangent à cette surface est une solution du problème en question, et réciproquement.

On conclura de là que pour résoudre ce problème le plus complètement possible, il convient de déterminer l'enveloppe développable circonscrite aux deux surfaces S et *s*.

415. Pour cela, ayant mené un plan quelconque P; ayant construit, les courbes Δ et Ω, leurs projections δ et ω sur le plan P, et la tangente φ aux lignes δ et ω, on déterminera le point *m*, où la droite φ et la ligne δ se toucheront, et l'on déterminera pareillement le point de contact *n* des lignes φ et ω. Ces deux points *m* et *n* seront les projections sur le plan P des deux points M et N, suivant lesquels le plan φ touchera les surfaces S et *s*. Les points M et N seront situés sur les courbes Δ et Ω; il sera aisé de les construire, et en menant une droite MN qui les contienne, cette droite sera un élément de la surface développable cherchée. En construisant donc de nouveaux plans auxiliaires de projection P′, P″, P‴, etc., on obtiendra de nouveaux points M′, M″, M‴, etc., N′, N″, N‴, etc., analogues à M et à N, et la suite des droites MN, M′N′, M″N″, M‴N‴, etc., que l'on déduira de ces points, déterminera cette surface.

Connaissant les points M, M′, M″, etc., N, N′, N″, etc., il sera facile de construire les lignes MM′M″..., NN′N″..., suivant lesquelles la surface développable circonscrite touchera les surfaces données S et *s*.

Nous n'appliquerons cette théorie à aucun exemple : les ombres nous fourniront l'occasion de l'employer. (Voyez le livre Ier de la *Science du dessin.*)

416. Si l'une des surfaces données, la surface S, par exemple, était une surface développable, la ligne δ serait une ligne droite, ou le système de plusieurs lignes droites, et il ne serait pas possible de mener la tangente φ; d'où il suit que le plan quelconque P ne conduirait à aucune solution.

Cependant, si la position de ce plan était telle que quelques-unes des droites qui remplacent la ligne δ touchassent la ligne ω, ces droites seraient elles-mêmes les traces et les projections des solutions du problème proposé.

Il est facile de voir qu'en général, lorsqu'il n'y a qu'une des deux surfaces données qui soit développable, le problème n'est pas insoluble ; car si l'on fait tourner, autour de la surface développable S, un plan tangent à cette surface, ce plan, généralement parlant, touchera la surface non développable *s*, dans une ou plusieurs des positions qu'il occupera, et ces positions seront tangentes aux surfaces S et *s*. Nous laisserons chercher au lecteur un moyen graphique de construire ces positions du plan tangent mobile.

Si les surfaces S et *s* étaient toutes deux développables, le problème serait impossible.

417. PROBLÈME 2. *Deux surfaces quelconques non développables étant connues, on demande le plan tangent mené à ces surfaces par un point pris arbitrairement dans l'espace.*

Ce problème sera déterminé, et pour le résoudre il ne s'agira que de mener par le point donné un plan tangent à la surface développable circonscrite aux deux surfaces données. On doit sentir que les opérations à faire seront en général très compliquées : en voici l'exposé.

On construira, par le procédé du n° 415, plusieurs élémens MN, M'N', M"N", etc., de la surface développable circonscrite aux deux surfaces données; les projections horizontales de ces élémens seront tangentes à une courbe ζ que l'on décrira; leurs projections verticales seront tangentes à une courbe ζ' que l'on décrira pareillement, et l'on aura l'arête de rebroussement (ζ, ζ') dont ces deux courbes seront les projections. Cela fait, on menera par le point donné, que nous nommerons K, un plan sécant quelconque; il coupera les élémens MN, M'N', M"N", etc., suivant une suite de points *r*, *r'*, *r"*, etc.; on construira le lieu de ces points; par le point K on menera une tangente θ à la courbe *rr'r"*...; par le point de contact de cette tangente on menera une autre tangente à l'arête (ζ, ζ'); cette nouvelle tangente sera un élément de la surface développable, et le plan qui passera par cet élément et par la tangente θ sera évidemment le plan tangent demandé.

418. Supposons que les surfaces données soient deux sphères, la solution du problème sera fort simple, ainsi qu'on va le voir.

Soit (A, A') le centre de l'une de ces sphères, A'*b* son rayon, (B, B') le centre de l'autre sphère, B'*h* son rayon, et (C, C') le point par lequel on demande de mener un plan tangent à ces deux sphères. Pl. 32.

Par les points (A, A') et (B, B') nous menerons la droite (AB, A'B'), et nous remarquerons qu'il y a deux cônes qui touchent et enveloppent les deux surfaces données. L'un est engendré par le plan *vx*, tangent extérieurement aux deux sphères et mobile autour d'elles : il a pour sommet le point (D, D'), où la droite (AB, A'B') perce le plan *vx*. L'autre est formé par les intersections consécutives d'un plan mobile tangent intérieurement au système des surfaces données : il a pour sommet l'intersection (E, E') du plan *yz* et de la droite (AB, A'B').

Tout plan tangent à l'une des deux surfaces coniques auxiliaires sera évidemment tangent aux deux sphères; donc, si l'on mène par le point (C, C') des plans tangens à ces surfaces, ces plans résoudront le problème proposé. Il suit de là que ce problème aura quatre solutions; car on peut mener par le point (C, C') deux plans tangens à chaque surface conique auxiliaire.

419. Construisons celles de ces quatre solutions qui correspondent au cône dont le sommet est en (D, D'). Et, pour abréger le discours, désignons chaque sphère par son centre, et chaque cône par son sommet.

Cela posé, nous remarquerons que le cône (D, D') touche la sphère (A, A') suivant un cercle qui peut être pris pour base du cône; que les plans tangens demandés passent par la droite (DC, D'C'); et enfin, que si l'on prolonge cette droite jusqu'à ce qu'elle perce le plan de la base en un

Pl. 32. point, chaque plan tangent passera par une tangente à la base, menée par ce même point.

Amenons le système des données, en le faisant tourner autour de la verticale dont le pied est en A, dans une position telle que le plan AD ait pour trace la droite AG parallèle au plan vertical; il sera facile ensuite de trouver les plans cherchés, parce que cette position donnera presque immédiatement le cercle de contact de la sphère (A, A′) et du cône (D, D′). Dans le mouvement du système, la sphère aura tourné sur elle-même, sans changer de position; le point (D, D′) sera venu en (G, G′); le point (C, C′) aura décrit un arc de cercle (CH, C′H′) égal à PQ, pour venir s'arrêter en (H, H′); l'axe (AD, A′D′), du cône (D, D′), se sera rabattu en (AG, A′G′); et je dis que si l'on mène par le point G′ une tangente G′*c* au cercle *abc*, et par le point de contact *c* de cette tangente une perpendiculaire *bc* à l'axe A′G′, *bc* sera la projection verticale du cercle de contact de la sphère (A, A′) et du cône (G, G′). En effet, concevons que le cercle (SK, *abc*), et la tangente (GA, G′*c*′), se meuvent circulairement autour de (AG, A′G′); il est évident que le cercle *abc* décrira la sphère (A, A′); que la droite G′*c* décrira le cône (G, G′), et que le point *c* engendrera le cercle de contact de ces deux surfaces : or, ce cercle sera dans un plan perpendiculaire à l'axe de révolution (AG, A′G′); donc il sera dans le plan (LI′, I′*b*), passant par le point *c*, et perpendiculaire au plan vertical de projection : donc enfin il sera projeté verticalement en *bc*.

Connaissant le plan (LI′, I′*b*) de ce cercle, on construira le point (*n*, *n*′) où ce plan est percé par la droite (GH, G′H′), que contiennent les plans tangens cherchés, et il ne s'agira plus, pour déterminer ces plans, que de mener par le point (*n*, *n*′) des tangentes au cercle *bc*. Pour cela, on rabattra le plan de ce cercle sur le plan vertical AG, en le faisant tourner autour de l'intersection (AK, *bc*O) de ces plans : le centre *d* ne prendra aucun mouvement; donc ce même cercle rabattu sera celui *b*U*c*V, dont le centre est en *d*, et dont le rayon est *dc*. La droite K*n*, perpendiculaire à l'axe de rotation (AK, *bc*O), viendra en *n*′N, et le point N sera le rabattement de (*n*, *n*′); enfin, la trace horizontale LI′, du plan (LI′, I′*b*), se rabattra suivant une ligne RT, perpendiculaire en I′ à la ligne *b*O. D'après cela, si l'on mène par le point N les tangentes NU, NV, elles appartiendront chacune à l'un des plans cherchés; et comme elles seront rencontrées par la trace RT du plan (LI′, I′*b*), la première en R et la seconde en T, il sera facile d'en déduire ces plans. Ramenons d'abord le cercle *b*U*c*V dans le plan *bc*; la

droite RT, en tournant autour du point (I, I'), qui restera immobile, viendra se placer sur l'IL. Concevons ensuite qu'on ramène tout le système dans sa position primitive, en faisant tourner le plan AG autour de la verticale A, le point (I, I') viendra en i; le rabattement RT, de la droite (LI', I'), perpendiculaire à AG, viendra en rt, perpendiculairement à AD; et les points R et T viendront en r et t, de façon que l'on ait $Ai = AI$, $ri = RI'$, $it = I'T$. D'où l'on voit que les points r et t du plan horizontal appartiendront aux plans cherchés; mais ces plans passent par la droite (DC, D'C'), qui perce le plan horizontal en (F, F'); donc les droites rF, tF, sont les traces horizontales de ces plans. Quant aux traces verticales, on ne les a pas construites afin que l'épure soit moins confuse : il est aisé de voir comment elles s'obtiendront. Pl. 32.

Il serait facile de se tromper en rapportant les points R et T, en r et t, si l'on ne remarquait pas que les points R et N sont situés du même côté par rapport à l'axe de rotation bO : or, en projection horizontale, bO se trouve en AK, et le point N en n; donc le point R doit être, ainsi que le point n, derrière le plan AK; donc lorsqu'on ramène ce plan en AD, le point R doit être du côté vers lequel s'avance le plan mobile, c'est-à-dire du côté A' de AD.

420. *Exécution de l'épure.* Comme on n'a pas construit les traces verticales des deux plans tangens dont on s'est occupé, on suppose que ces plans n'existent pas dans l'espace, et l'on marque leurs traces horizontales en lignes mixtes (55). Toutes les autres lignes de l'épure sont des lignes de construction, hors les contours des projections des deux sphères, lesquels sont indiqués en lignes pleines.

421. PROBLÈME 3. *Soient* (A, A'), (B, B'), (C, C'), *les centres de trois surfaces sphériques, et* Aa, Bb, Cc, *les rayons respectifs de ces surfaces; on demande un plan qui les touche à la fois toutes les trois.* Pl. 33.

Nous remarquerons, en premier lieu, que tout plan tangent à trois cônes qui enveloppent deux à deux les trois sphères données, est tangent à ces sphères : or, ce plan tangent contient les sommets des trois cônes enveloppans; mais ces sommets sont nécessairement sur les droites (AB, A'B'), (AC, A'C'), (BC, B'C'), ou, ce qui revient au même, dans le plan des centres des sphères : donc ils sont sur une même droite qui est l'intersection de ce plan et du plan tangent.

Remarquons, en second lieu, que les sphères données peuvent être enveloppées par six cônes, savoir : trois dont les sommets sont au-delà de l'espace compris entre les sphères qu'ils enveloppent, et trois dont les sommets sont situés entre les sphères enveloppées. Les trois premiers sont indiqués en projection horizontale, et ont leurs sommets en (D, D'),

Pl 33. (E, E'), (F, F'). Les trois derniers sont indiqués en projection verticale, et ont pour sommets les points (G, G'), (H, H'), (I, I').

Enfin remarquons, en troisième lieu, que lorsqu'un plan est tangent à deux sphères, et qu'il laisse ces sphères d'un même côté, il est tangent au cône enveloppant dont le sommet est au dehors des sphères; tandis que s'il laisse les sphères de côtés différens, il est tangent au cône enveloppant dont le sommet est entre les sphères.

Cela posé désignons, comme dans le problème précédent, les sphères par leurs centres, et les cônes enveloppans par leurs sommets.

Il est clair, 1°. qu'on pourra mener aux trois sphères un plan tangent qui les laisse d'un même côté : or, ce plan touchera les trois cônes (D, D'), (E, E'), (F, F'); donc les sommets de ces cônes seront sur une même droite (DEF, D'E'F'); 2°. qu'on pourra mener aux trois sphères un plan tangent qui laisse celles dont les centres sont en (A, A') et (B, B') d'un même côté, et la sphère (C, C') de l'autre côté : or, ce plan touchera les trois cônes (D, D'), (H, H'), (I, I'); donc les sommets de ces cônes seront sur une même droite (DIH, D'I'H'); 3°. qu'on pourra mener aux trois sphères un plan tangent qui laisse celles dont les centres sont en (A, A') et (C, C') d'un même côté, et la troisième sphère (B, B') de l'autre côté : or, ce plan touchera les trois cônes (E, E'), (G, G'), (I, I'); donc les sommets de ces cônes seront sur une même droite (GIE, G'I'E'); 4°. enfin, on pourra mener aux trois sphères un plan tangent qui laisse d'un même côté les sphères (B, B') et (C, C'), et de l'autre côté la sphère (A, A') : or, ce plan touchera les trois cônes (F, F'), (G, G'), (H, H'); donc les sommets de ces cônes seront sur une même droite (GHF, G'H'F'). Il suit donc de là que les sommets des six cônes enveloppans sont les intersections de quatre droites (DEF, D'E'F'), (DIH, D'I'H'), (GEI, G'I'E') et (GHF, G'H'F') situées dans un même plan.

Il est évident que tout plan mené par une de ces droites, tangentiellement à l'une des trois surfaces coniques dont elle réunit les sommets, touchera les trois sphères données; et comme on peut mener par une droite deux plans tangens à un cône droit, nous en conclurons qu'en général le problème proposé doit avoir huit solutions.

On pourra facilement construire ces huit solutions, puisqu'il ne s'agira, pour en avoir une, que de mener un plan tangent au cône circonscrit à deux sphères connues, par une droite sur laquelle soit le sommet de ce cône. C'est la question qui vient d'être résolue n° 419.

422. Problème 4. *Étant données trois surfaces quelconques* P, Q, R, *on demande un plan* π *qui les touche toutes les trois.*

Imaginons une première surface développable auxiliaire, qui touche et enveloppe les deux surfaces P et Q. Imaginons une seconde surface développable auxiliaire, qui touche et enveloppe pareillement les surfaces P et R. Il sera possible de déterminer les courbes de contact φ et ψ des deux surfaces auxiliaires avec la surface P (415) : ces courbes étant situées sur une même surface, elles auront en général des points d'intersection, et il sera facile de les construire. Soit m un de ces points; je dis que le plan tangent en m à la surface P sera le plan demandé : en effet, ce plan, touchant la surface P en un point des courbes φ et ψ, sera tangent aux deux surfaces développables auxiliaires; donc il sera tangent aux

surfaces Q et R ; donc, etc. D'après cela, on voit comment on pourra trouver toutes les solutions du problème proposé.

423. Si les surfaces données sont des sphères, les surfaces développables auxiliaires seront des cônes. Il y aura deux de ces cônes qui envelopperont les sphères P et Q (418), et ils toucheront la première de ces sphères suivant deux cercles x et y. Il y aura pareillement deux cônes qui envelopperont les sphères P et R, et qui toucheront la sphère P suivant des cercles x' et y'. Chacun de ces cercles rencontrera en quatre points les cercles x et y; par conséquent, le problème dont il s'agit aura huit solutions, ainsi que nous l'avons déjà dit (421).

424. Si l'une des surfaces données était développable, le problème serait impossible; car, si l'on imagine que cette surface soit celle qu'enveloppent à la fois les deux surfaces auxiliaires, les lignes de contact φ et ψ seront des élémens de la surface développable donnée, et ces élémens, en général, n'auront pas de points communs.

Le problème serait à plus forte raison impossible si deux des trois surfaces se trouvaient en même temps développables.

Nous n'appliquerons cette solution à aucun exemple.

LIVRE IV.

INTERSECTIONS DE SURFACES.

425. Nous avons indiqué, livre II (144), les procédés généraux qui servent à déterminer les intersections des surfaces : mais nous n'avons pu en parler que très succinctement ; et comme la détermination de ces intersections est un objet d'une grande utilité, il est nécessaire que nous exposions avec détail tous les moyens qui servent à les construire.

Nous chercherons d'abord les intersections des plans et des surfaces courbes ; puis celles de ces dernières surfaces entre elles ; ensuite nous nous occuperons des tangentes à ces intersections, et nous terminerons par une théorie synthétique des principales propriétés des sections planes des cônes à bases circulaires.

426. Pour qu'une intersection demandée soit connue le mieux possible, nous ne nous contenterons pas toujours de chercher ses projections. Si elle est plane, nous construirons ce que nous appellerons son *rabattement* : c'est-à-dire sa figure sur le rabattement de son plan, ou, ce qui revient au même, sa véritable forme ; et, si elle est située sur une surface développable, nous développerons cette surface, et nous construirons la figure de la courbe sur le développement obtenu : nous appellerons cette figure la *transformée* de cette courbe.

CHAPITRE PREMIER.

Des intersections de plans et de surfaces courbes.

427. Problème 1er. *On donne un cylindre et un plan, et l'on demande, 1°. leur intersection commune ; 2°. le rabattement de cette intersection ; 3°. la transformée de la même intersection sur le développement du cylindre.*

L'énoncé de la question laissant le choix des plans de projection, nous prendrons pour plan horizontal un plan perpendiculaire à la génératrice du cylindre donné, et pour plan vertical un plan à la fois perpendiculaire au plan horizontal et au plan donné.

428. D'après cela, soit (PQ, QR) le plan donné, et ABCD... la trace horizontale de la surface cylindrique donnée. Tous les points de cette surface auront leurs projections horizontales sur la courbe ABCD..., et ses élémens seront des droites verticales (A, aA'), (B, bB'), (C, cC')..., etc. Pl. 34.

De même que les points du cylindre donné se projettent horizontalement sur une ligne ABCD..., ceux du plan donné se projettent verticalement sur la droite QR; donc les points de l'intersection cherchée, devant se trouver à la fois sur le cylindre et sur le plan donnés, se projetteront horizontalement suivant ABCD..., et verticalement suivant QR. Et comme les élémens du cylindre sont tous compris, en projection verticale, entre les contours aA' et gG', les points de l'intersection cherchée ne pourront occuper sur QR que la partie A'G'; donc cette intersection sera la courbe (ABCD..., A'G').

D'où l'on voit que, d'après le choix que nous avons fait des plans de projection, l'intersection demandée se trouve représentée immédiatement au moyen des lignes qui figurent les données.

429. Construisons maintenant le rabattement demandé. Pour cela, il ne s'agira que de rabattre le plan (PQ, QR) sur l'un des deux plans de projection, ou sur un plan parallèle à l'un de ces deux plans, et l'intersection (ABCD..., A'G') viendra s'abattre sur ce plan suivant la courbe cherchée. Soit MN, par exemple, un plan vertical parallèle au plan vertical de projection, ce plan et le plan donné (PQ, QR) se couperont suivant une droite (AG, A'G'). Imaginons que le plan donné tourne autour de cette droite jusqu'à ce qu'il coïncide avec le plan MN; dans le mouvement, les différens points de l'intersection (ABC..., A'G') ne changeront pas de situation par rapport à l'axe de rotation; donc les points (F, F'), (H, F'), situés sur la droite (FH, F'), perpendiculaire à cet axe au point (O, F'), et distans de ce point des longueurs OF, OH, seront, après le mouvement, sur la droite $\varphi F' \varkappa$ perpendiculaire en F' à l'axe A'G', à des distances du point F', $\varphi F' = OF$, $\varkappa F' = OH$; c'est-à-dire que ces points seront, le premier (F, F') en φ, et le deuxième (H, H') en $\varkappa$.

En faisant les mêmes constructions sur d'autres points de l'intersection

Pl 34. demandée, on déterminera le rabattement $A'\epsilon\gamma\delta\epsilon\phi G'$..., qui n'est autre chose que cette intersection dans sa véritable grandeur.

430. Passons à la construction du développement du cylindre donné, et de la figure que prend sur ce développement l'intersection (ABCD..., A'G').

Concevons que tous les élémens de ce cylindre soient autant de charnières, et imaginons que les petits plans formés par deux élémens consécutifs quelconques tournent, autour de ces charnières, jusqu'à ce qu'ils soient tous compris dans un même plan; l'ensemble de leurs nouvelles positions formera le développement cherché, et il est clair que la courbe ABCD... sera une droite sur ce développement. En effet, tous les élémens du cylindre sont perpendiculaires à cette courbe; donc elle sera composée, dans le développement, d'une infinité de petites droites comprises chacune entre deux élémens voisins et perpendiculaires à ces élémens : or, dans le mouvement, ces deux élémens consécutifs conserveront leur parallélisme; donc, après le mouvement, tous les élémens seront encore parallèles; donc toutes ces petites droites formeront une droite unique.

D'après cela, il sera facile d'avoir le développement du cylindre donné. Soit $a'a''$ une droite quelconque tracée sur un plan; prenons ce plan pour celui du développement cherché, et prenons la droite $a'a''$ pour représenter sur ce développement la courbe ABCD...A. On portera les arcs AB, AC, AD..., à partir d'une origine commune a', de a' en b', de a' en c', de a' en d', etc., sur la droite $a'a''$; par les points a', b', c', d'..., on élevera des droites $a'A''$, $b'B''$, $c'C''$..., perpendiculaires à $a'a''$, et l'ensemble de ces droites représentera le développement du cylindre.

431. Pour rapporter la courbe (ABCD..., A'G') sur ce développement, on remarquera que les points (A, A'), (B, B'), (C, C')..., de cette courbe, sont, sur les élémens (A, aA'), (B, bB'), (C, cC')..., au-dessus du plan horizontal, c'est-à-dire au-dessus de la courbe ABCD..., des hauteurs respectives aA', bB', cC', etc., et l'on en conclura qu'en portant ces hauteurs de a' en A'', de b' en B'', de c' en C'', et ainsi de suite, les points A'', B'', C''... appartiendront à la transformée demandée : donc, en réunissant ces points par une ligne A''B''C''... on aura cette transformée.

432. Nous ferons observer que lorsqu'il arrive, comme dans la figure prise pour exemple, que la courbe ABCD...A soit fermée, rien ne dit

que la série des arcs AB, AC, AD, etc., soit terminée à l'un de ces arcs; donc il est nécessaire d'admettre qu'elle soit indéfinie, c'est-à-dire que la courbe ABCD...A soit formée d'une infinité de circonvolutions, qui partent du point A, tant d'un côté de ce point que de l'autre côté, et qui se rectifient sur la droite indéfinie $a'a''$, depuis le point a' jusqu'à l'infini à gauche de ce point, et depuis ce même point jusqu'à l'infini à droite. Il suit de là que l'arc A″G″A‴ n'est qu'une partie de la transformée A″B″C″D″..., et que cette courbe s'étend à l'infini à droite et à gauche de l'élément a'A″. Pl. 34.

Il est aisé de voir que lorsqu'on aura porté l'arc ADGKA de a' en a'', il ne s'agira, pour développer l'arc ADGKAB, que de porter AB $= a'b'$, au-delà du point a'', jusqu'en un certain point que nous nommerons b'', et que, pour avoir le point correspondant de la transformée, il faudra porter la hauteur bB′ $= b'$B″, au-dessus du point b''. D'où l'on voit que les points de la transformée qui suivent le point A‴ sont placés les uns par rapport aux autres, comme ceux qui suivent le point A″ sont placés aussi les uns par rapport aux autres. Nous conclurons de là que la transformée de l'intersection demandée est composée de parties égales à l'arc A″G″A‴, lesquelles s'ajoutent les unes aux autres, et ont pour longueur commune le développement $a'a''$ d'une circonvolution de la courbe ABCD...A (*).

433. Connaissant les deux projections ABCD...A, A′G′, de l'intersection cherchée, son rabattement A′$\beta\gamma\delta$....A′, et sa transformée A″G″A‴..., on devra parfaitement se figurer la situation de cette courbe sur le cylindre ABCD... Et s'il fallait la décrire sur un cylindre solide, égal au cylindre donné, la transformée A″G″A‴ en fournirait un moyen à la fois fort exact et fort simple : car il ne s'agirait que de prendre la surface plane A″$a'a''$A‴G″A″, et de la rouler sur le cylindre solide de manière que les points a' et a'' coïncidassent en un seul; alors la ligne A″G″A‴ formerait, sur ce cylindre, une courbe tout-à-fait égale à l'intersection (ABCD...A, A′G′).

434. Si l'on avait fait un autre choix de plans de projection, l'intersection demandée ne se serait pas trouvée immédiatement représentée;

(*) Si le cylindre donné est comme dans l'épure un cylindre à base circulaire, la ligne rabattue A′$\beta\gamma$... A′ sera elliptique (581), et la transformée A″G″A‴ sera une sinusoïde. (*Voyez* Note 7.)

Pl. 34. mais on l'aurait déterminée aisément, en construisant les points de rencontre des élémens du cylindre donné avec le plan donné (623).

435. *Exécution de l'épure.* Le rabattement $A'\beta\gamma\delta\epsilon\varphi G'\eta A'$, de la courbe demandée, étant situé dans le plan vertical MN, il est caché par la partie antérieure du cylindre donné; donc les arcs de ce rabattement, qui sont compris entre les droites aA', gG', doivent être ponctués. Il est facile de voir comment les autres lignes dont nous avons parlé doivent être mises au trait.

Le développement complet d'un cylindre à base circulaire couvre entièrement un plan indéfini; mais, comme nous n'avons développé ici que la partie du cylindre donné qui est comprise entre le plan horizontal de projection et le plan horizontal XY, l'épure n'est couverte par le développement obtenu qu'entre les droites parallèles $a'a''$, xy. La dernière de ces droites, construite de façon qu'on ait $a'x = gz$, est évidemment la transformée de l'intersection du cylindre donné et du plan XY.

On parlera plus loin (502 — 504) des tangentes qF, $n'\varphi$ et $q'F''$.

436. *Problème 2. Trouver, 1°. l'intersection d'un cône droit et d'un plan; 2°. le rabattement de cette intersection; 3°. la transformée de la même intersection sur le développement de la surface du cône.*

Lorsqu'on résout un problème, on doit employer les moyens les plus simples pour arrriver à sa solution; d'après cela, nous prendrons pour plan horizontal un plan perpendiculaire à l'axe du cône, et pour plan vertical un plan à la fois perpendiculaire au plan donné et au plan horizontal.

Pl. 35. Soit donc (A, A') le centre du cône donné, BCDE le cercle décrit du point A comme centre, suivant lequel la surface de ce cône coupe le plan horizontal; enfin, soit (LF, FD') le plan coupant donné. Le contour de la projection verticale du cône sera évidemment formé par les élémens (RAQ, R'A'U), (QAR, Q'A'S).

437. Cela posé, on voit d'abord que les points (B,F), (C, F), (M, M') et (G, G'), appartiennent à l'intersection cherchée; les deux premiers, parce qu'ils sont communs aux traces des deux surfaces données, et les deux derniers, parce qu'ils sont ceux où les élémens (RAQ, R'A'U), (QAR, Q'A'S), percent le plan (LF, FD').

Pour avoir d'autres points de cette intersection, on menera des élé-

mens (H'A, HA'), (H''A, HA'), du cône; on déterminera les points (I', I), Pl. 35.
(I'', I), où ils percent le plan (LF, FD'), et ces points appartiendront à la courbe cherchée. En menant donc un grand nombre d'élémens du cône donné, on trouvera autant de points de cette courbe qu'on en voudra, et l'on pourra bientôt décrire ses deux branches (BI'MI''C, FM'), (DGE, D'G').

A la simple inspection de la figure, on voit clairement qu'en prolongeant indéfiniment le cône et le plan (LF, FD'), ces deux surfaces continueront toujours de se couper; d'où il suit que les branches (BI'MI''C, FM'), (DGE, D'G'), s'étendent à l'infini (*).

438. Cherchons maintenant le rabattement de l'intersection obtenue. Pour le trouver, nous imaginerons que le plan coupant (LF, FD') tourne autour de sa trace verticale FD', et vienne se rabattre sur le plan vertical; dans le mouvement qui aura lieu, chaque point (I', I) de la courbe (BI'MI''C......DGE, FD') décrira un cercle dont le plan I*i* sera perpendiculaire à la charnière, et dont le rayon sera la distance NI' du point (I', I) à la droite FD' : donc, si l'on porte cette distance de I en *i*, le point *i* sera le rabattement du point (I', I). En opérant de la même manière sur d'autres points de l'intersection (BI'MI''C...DGE, FD'), on trouvera de nouveaux points du rabattement de cette courbe, et lorsqu'on aura un nombre suffisant de ces points, on décrira les deux branches *b'im'c'*, *plp'''*, du rabattement demandé.

439. Nous ferons remarquer que l'intersection du plan et du cône donnés est composée de deux parties symétriques par rapport au plan RQ. Il en résulte que si l'on porte la distance F*f*, de F en *f'*, sur une droite F*f'* perpendiculaire à la charnière FD', et qu'on mène la ligne *f'y* parallèle à FD', cette ligne *f'y* divisera le rabattement *b'im'*J*c'*...*plp'''*..., en deux parties symétriques; en sorte qu'après avoir mené la ligne IT', perpendiculaire en I à la charnière, il suffira, pour avoir deux points *i* et J de la courbe rabattue, de porter la distance TI'' = TI', de T' en *i* et de T' en J.

Comme la forme de la courbe *b'im'*J*c'*......*plp'''* est indépendante de la grandeur F*f'*, il est clair qu'en construisant les points de cette courbe, au moyen de la ligne *f'y*, ainsi qu'on vient de construire les

(*) Ces deux branches forment une hyperbole (583).

Pl. 35. points i et J, on pourra prendre la distance Ff' absolument quelconque. Cette conséquence s'appliquera au problème qui suit.

440. Pour construire le développement du cône donné, on remarquera que tous les points de ce cône, situés sur le cercle (BCDE, R'Q'), sont à la même distance A'R' du sommet (A, A'), et qu'ils forment par

Pl. 35 et Pl. 36. Fig. 1. conséquent, sur le développement cherché, un arc de cercle dont le rayon est A'R'. D'après cela, prenons sur un plan un point a; menons par ce point une droite rau, que nous prendrons pour représenter l'élément (RAQ, R'A'U); décrivons du point a comme centre, avec le rayon $ar =$ A'R', un arc de cercle qrq'; portons sur cet arc, à partir du point r, l'arc RBEQ de r en q, et à partir du même point r, mais dans le sens opposé, l'arc RCDQ de r en q'. Enfin, menons par les points q, q', et par le point a, des droites indéfinies qa, $q'a$: les deux secteurs opposés qaq', sas', que l'on obtiendra, représenteront le développement de la surface du cône {(A, A'), (BCDE, R'Q')}. En effet, imaginons que cette surface s'ouvre suivant l'élément (QAR, Q'A'S), pour se développer sur le plan tangent en (R, R'); la droite (RA, R'A') se trouvera être, sur le développement, une certaine droite ra égale à R'A'; la circonférence QDCRBEQ se trouvera être un arc $q'rq$, décrit du point a comme centre avec le rayon ar, tellement que les longueurs développées de cet arc et de la circonférence QDCRBEQ soient égales entre elles. Donc l'élément (QAR, Q'A'S) se trouvera dans les deux positions qas, $q'as'$; donc le secteur qaq' sera le développement de la nappe inférieure du cône, et le secteur sas', celui de la nappe supérieure : donc enfin ces deux secteurs représenteront le développement du cône donné.

441. Il sera aisé de rapporter sur ce développement la section (BMC..., DGE, FD'); car si l'on porte l'arc RH' de r en h', et qu'on mène la droite $h'a$, cette droite représentera l'élément (H'A, HA') : or, cet élément contient un point (I', I) de cette section, et ce point est situé vers le sommet du cône, à une distance (H'I', HI) du point (H', H); donc si l'on construit cette distance et qu'on la porte de h' en i', le point i' sera, sur le développement du cône, la position qu'occupe le point (I', I). On trouvera par le même moyen la position i'' du point (I'', I), et en répétant cette construction sur un assez grand nombre de points de la section (BMC...DGE, FD'), on obtiendra la transformée $ci''mi'b\ldots dp''g'\ldots gp'e\ldots$ de cette section.

Comme nous avons supposé que pour développer la surface donnée on

ouvrait cette surface suivant l'élément (QAR, Q'A'S), il est clair que la branche supérieure de l'intersection demandée se trouve divisée en deux parties $dp''g'$, $gp'e$, sur le développement du cône. Pl. 35 et Pl. 36. Fig. 1.

442. Pour fixer les idées sur des parties bien connues du cône donné, nous avons coupé ce cône par un plan horizontal SU, situé au-dessus du plan horizontal à une hauteur égale à deux fois aA', et nous ne nous sommes occupés que de la partie du cône {(A, A'), (BCDE, R'Q')}, située entre les plans R'Q', SU. Il est évident que tous les élémens de ce cône font le même angle avec la droite (A, aA'a'), et il en résulte qu'ils percent le plan SU en des points éloignés du point (A, A') d'une même distance A'U = A'R'; donc le bord SU de la nappe supérieure du cône est sur le développement de ce cône un arc sus' du même rayon que $q'rq$.

C'est aussi pour fixer les idées sur des parties bien connues des données, et en même temps pour simplifier l'épure, que nous avons supposé que le développement $q'rq$, du cercle QDCRBEQ, s'arrêtait en q et q' : car, après la convention de placer le point R en r, il était naturel de porter les arcs RH', RB, REQ, REQC, etc., de r en h', de r en b, etc., sans s'arrêter à aucun point Q; et de porter pareillement RH'', RC, RDQ, RDQB, etc., en rh'', rc, etc., sans s'arrêter non plus à aucun point Q. De cette manière, les circonvolutions infinies de la trace BCDE se seraient développées sur une infinité de circonvolutions du cercle $usq'rqs'$; les branches de courbe $ci''mi'b$, $dp''g'$, $gp'e$, se seraient reproduites à l'infini, et les deux dernières, au lieu de s'arrêter à des points g' et g, se seraient liées à d'autres branches sans que ces points eussent rien de remarquable.

Si le plan donné (LF, FD') avait eu pour trace verticale une droite nx, il n'aurait coupé que la nappe inférieure du cône, et l'intersection demandée aurait été, comme dans le problème précédent, une courbe fermée. Pour mettre plus de variété dans les lignes qui composent les épures, nous avons choisi la trace FD' de façon que le plan (LF, FD') coupe à la fois les deux nappes du cône; mais il résulte de là cet inconvénient, que les élémens de ce cône perçant le plan (LF, FD') sous des angles fort aigus, il est difficile de dessiner l'épure avec exactitude. On obviera à cet inconvénient en déterminant les points de l'intersection cherchée par le procédé suivant.

443. La surface donnée est une surface de révolution dont l'axe est (A, aa'), et dont la méridienne principale est le système des deux droites (RQ, R'U), (QR, Q'S); donc, si l'on coupe le plan et le cône donnés par

Pl. 35 et Pl. 36. Fig. 1. un plan horizontal quelconque IK′, ce plan déterminera sur le cône {(A, A′), (BCDE, R′Q′)} une section circulaire (I′I″P″KP′, IK′), et sur le plan (LF, FD′) une section rectiligne (ON, I); ces deux sections, situées dans le même plan, se rencontreront en général en deux points (I′, I), (I″, I), qui appartiendront évidemment à l'intersection cherchée.

Si la position VK″ du plan auxiliaire coupe la nappe supérieure du cône, les sections (KP″I″TI′P′, K″V), (P′P″, P), se rencontreront en deux points (P′, P), (P″, P), de la branche (DGE, G′D′), de cette intersection.

444. On peut remarquer que tous les points d'un cercle VK″, de la surface donnée, étant éloignés du sommet (A, A′) d'une même distance A′K″, les points de ce cercle sont nécessairement distribués, sur le développement du cône, suivant les points d'un arc circulaire *tp″kp′t′*, dont le rayon *ak* égale A′K″. Il résulte de là que pour rapporter sur ce développement les points (P′, P), (P″, P), il suffira de décrire avec un rayon A′K″ l'arc *tkt′*, et de porter les arcs égaux KP′, KP″, de *k* en *p′* et de *k* en *p″*, sur ce même arc *tkt′*. Les points *p′* et *p″*, que l'on trouvera ainsi, seront les points cherchés.

Le plan IK′ ayant été mené de manière que la droite K′K″ soit perpendiculaire à la ligne de terre, les deux cercles IK′, VK″, ont même projection horizontale, et occupent sur le développement les arcs *tkt′*, *t″i″i′t‴*, du même cercle *tkt′t‴i′t″*. Et comme le cercle IK′ passe par les points (I′ I), (I″, I), le cercle (*t″i″i′t‴*) doit nécessairement contenir les points *i′* et *i″*.

445. Si le cône donné, au lieu d'être un cône droit, était un cône quelconque, l'intersection demandée et son rabattement s'obtiendraient de même par les procédés des n°s 437, 438 et 439. Mais il faudrait employer des moyens que nous exposerons plus loin (629), si l'on voulait obtenir le développement de ce cône et la transformée de l'intersection demandée.

446. *Exécution de l'épure.* On a supposé que le plan et le cône donnés étaient terminés au plan horizontal SU : il en résulte, 1°. que sur la projection horizontale, la nappe inférieure du cône est exactement cachée par sa nappe supérieure; 2°. que la branche BMC de l'intersection demandée doit être ponctuée; 3°. que la section SU, qui termine la partie supérieure du cône, se projette horizontalement suivant le cercle BCDE, et que ce cercle doit par conséquent être indiqué au moyen d'une ligne pleine; 4°. que la partie du plan donné, que l'on considère dans l'épure, est comprise entre les horizontales (LF, F), (ED, D′), la dernière, vue dans toute sa

longueur sur la projection horizontale, et la première, cachée seulement Pl. 35.
dans la partie BC, qui est située sous le cône donné.

La branche supérieure DGE de l'intersection demandée est évidemment vue, ainsi que les projections verticales FM', G'D', des deux branches de cette intersection.

Le plan VK'' coupe le cône suivant un cercle (TP''KP', VK''), vu en projection verticale, et en projection horizontale caché seulement par la petite partie PD' du plan donné. L'intersection du même plan VK'', avec le plan (LF, FD'), est une droite (P'P'', P), qui n'est cachée, en projection horizontale, que par la portion du cône comprise entre les cercles VK'' et SU.

Le plan IK' coupe le cône suivant un cercle (TP''KP', IK'), qui est vu en projection verticale, et qui, en projection horizontale, se confond avec le cercle (TP''KP', VK''). Le même plan IK', et le plan donné (LF, FD'), se coupent suivant la droite (ON, I), qui n'est évidemment vue, sur le plan horizontal, qu'au dehors du cercle BCDE.

Les élémens (H'X', HA'), (H''X'', HA'), ne sont vus, en projection horizontale, qu'à partir des points z et z', où ils sortent de dessous le plan donné FD'.

Le rabattement demandé est fait sur le plan vertical; ainsi, il ne peut être vu qu'au dehors des projections SA'U, R'A'Q', des nappes de la surface conique.

Quant au développement de cette surface, il est évident qu'il est entièrement vu.

Il sera parlé plus loin (505 — 513) des autres lignes de l'épure dont on ne dit rien ici.

447. PROBLÈME 3. *Une surface de révolution quelconque étant donnée, on demande son intersection avec un plan connu.*

Prenons pour exemple un hyperboloïde de révolution à une nappe (236), et choisissons pour plan horizontal un plan perpendiculaire à l'axe de révolution, et pour plan vertical un plan à la fois perpendiculaire au plan donné et au plan horizontal.

D'après cela, soient (A, A'A'') l'axe de révolution, (BC, B'C') la droite gé- Pl. 37.
nératrice de la surface donnée, et (DE, DF) le plan donné.

448. Coupons les deux surfaces données par des plans horizontaux; chacun de ces plans aura pour intersection avec le plan donné une

Pl. 37. droite, et avec l'hyperboloïde un cercle : cette droite et ce cercle se couperont en général en deux points, et ces points appartiendront évidemment à la courbe cherchée. Soit G'H un de ces plans; il coupera le plan (DE, DF) suivant la droite (H'H", H), et la génératrice (BC, B'C') suivant le (G, G') : or, ce point, dans la génération de l'hyperboloïde, aura décrit un cercle situé dans le plan G'H; donc si nous décrivons du point A comme centre, avec le rayon AG, un cercle GII', ce cercle sera la projection horizontale de l'intersection du plan G'H et de la surface donnée : donc les points I, I', seront les projections horizontales des deux points (I, H), (I', H) de la courbe cherchée (KISI', K'S'). En menant de nouveaux plans horizontaux, et en opérant sur ces plans, comme on vient d'opérer sur le plan G'H, on obtiendra de nouveaux points de cette intersection, et l'on pourra bientôt la construire.

449. Pour qu'elle soit bien tracée, dans le cas particulier pris pour exemple, il importe d'obtenir directement les points (K, K'), (S, S'), où elle perce le méridien principal *c*B. Or, si l'on fait attention que ces points résultent nécessairement de l'intersection de la droite (*c*B, DF), avec deux des positions que prend la génératrice (BC, B'C'), quand elle se meut pour produire l'hyperboloïde, on découvrira aisément le moyen suivant d'avoir ces points.

Imaginons que la droite (*c*B, DF) tourne autour de l'axe de révolution : elle engendrera dans son mouvement un cône dont le sommet sera en (A, *a*), et dont la trace horizontale sera le cercle *cde*; ce cône sera percé en deux points par la génératrice (BC, B'C'), et ces points appartiendront à deux élémens différens du cône. Concevons qu'on ramène ces deux élémens, un à un, dans la position (*c*B, DF), en les faisant tourner circulairement autour de (A, A'A"), et que chacun d'eux soit suivi, dans son mouvement, par la génératrice : il est clair que cette génératrice viendra prendre les deux positions où elle rencontre la ligne (*c*B, DF) suivant les points cherchés, et de plus, que ces points seront ceux où viendront s'arrêter les intersections du cône et de la génératrice. D'après cela, il ne s'agit plus que d'opérer. Menons un plan par le sommet (A, *a*) et par la ligne (BC, B'C') : ce plan passera par la droite (A*b*, *ab'*), parallèle à (BC, B'C'); donc il aura pour trace horizontale la ligne B*b*; donc il coupera le cône suivant les deux élémens *e*A*m*, *dn*A. Mais la génératrice (BC, B'C'), coupe ces élémens en deux points dont les projections horizontales sont en *m* et *n*; si donc nous ramenons les élémens

eAm et *dA*, dans la position *cA*, le point *n* viendra en K, le point *m* viendra en S, et les points cherchés (K, K′) et (S, S′) seront déterminés. Pl. 37.

450. Si l'on veut construire l'intersection (KISI′, K′S′), dans sa véritable grandeur, il ne s'agira que de rabattre son plan sur le plan vertical, comme on a fait dans le problème précédent (438). Pour éviter que ce rabattement ne sorte du cadre, et attendu que l'intersection demandée est divisée en parties symétriques par la droite (KS, K′S′), on a fait usage, en employant le procédé décrit n° 439, de l'observation qui termine ce numéro. En conséquence, on a pris tout simplement la droite *ks*, parallèle à DF, pour représenter le rabattement de (*c*B, DF); et pour avoir les points quelconques (I, H), (I′, H), rabattus, il a suffi d'élever par le point H la droite H*i* perpendiculaire à DF, et de porter les distances ZI = ZI′, de *z* en *i* et de *z* en *i*′, ce qui a donné les points *i* et *i*′ du rabattement *kisi*′ de l'intersection demandée. On voit comment, avec d'autres points, construits comme *i* et *i*′, on a pu décrire ce rabattement.

451. Il est clair que la solution que nous venons d'exposer s'applique à toute espèce de surface de révolution.

Dans le cas que nous avons choisi pour exemple, on peut résoudre le problème par un autre moyen, que nous allons développer, et qui consiste à déterminer des élémens de l'hyperboloïde, et à construire directement les points où ils percent le plan donné.

Pour employer commodément ce moyen, on décrit d'abord les deux cercles (BMR, B′T), (CPLO, O′C′P′), de l'hyperboloïde. Le premier, engendré par le point (B, B′), de la droite (BC, B′C′), est la trace horizontale de cette surface; et le second, engendré par le point (C, C′), de la génératrice (BC, B′C′), est ce que nous avons appelé la *gorge de l'hyperboloïde* (238). Connaissant ces deux cercles, on trouvera autant d'élémens de la surface donnée qu'on en voudra; car les projections horizontales de ces élémens sont toutes tangentes au cercle CPLO. Si donc on prend un point M sur la trace BMR; que l'on mène par ce point la droite MO, tangente en O au cercle CPLO; que l'on mette les points O et M en projection verticale, le premier en O′ sur O′P′, le second en A′ sur DB′, et que l'on mène A′O′, la droite (MO, A′O′), ainsi déterminée, sera un élément de l'hyperboloïde, et le point (Y, Y′), où cet élément perce le plan (DE, DF), sera un point de l'intersection demandée. On voit par là qu'en construisant un nombre suffisant d'élémens de la surface donnée on déterminera facilement cette intersection.

Pl. 37. Ayant obtenu un point (Y, Y') de (KYISI', K'S'), on menera par le point Y' la droite Y'*y*, perpendiculaire à DF; on portera XY de *x* en *y* et de *x* en *y'*, et l'on aura deux points *y* et *y'* du rabattement *ky'i'siy*.

Les constructions que cette solution exige offrent l'avantage de dessiner l'hyperboloïde. Et lorsque les élémens dont elle nécessite la construction sont assez rapprochés les uns des autres, ils déterminent les branches de courbe B'P'S', TK'Q, qui forment tout-à-la-fois la méridienne principale de la surface donnée, et le contour de la projection verticale de cette surface.

452. *Exécution de l'épure.* Afin que la partie supérieure de l'hyperboloïde, et le rabattement *ki'sy*, ne se confondent pas, on a supposé que l'hyperboloïde ne se prolongeait pas au-dessus du plan donné (DE, DF).

D'après cela, ce plan occupe la partie supérieure du système; ainsi, en projection horizontale, tout ce qu'il contient est vu, et il cache tout ce qu'il ne contient pas. Donc l'intersection demandée et les droites DE, (H'H", H), sont les seules grandeurs vues en projection horizontale.

En projection verticale, toutes les parties des élémens situées en avant du méridien *c*B sont vues; et toutes celles qui sont en arrière de ce méridien sont cachées. Or, les points où ces élémens percent le plan *c*B sont les points de la méridienne B'P'S', TK'Q, suivant lesquels les projections verticales de ces élémens touchent cette même méridienne; donc les élémens de l'hyperboloïde cessent d'être vus, ou commencent à être vus, en projection verticale, aux points où ils touchent le contour B'P'S', TK'Q. Cette conséquence suffira pour déterminer toutes les parties pleines et ponctuées des lignes de la projection verticale (*).

453. Problème général. *Trouver l'intersection d'un plan et d'une surface quelconque.*

De quelque manière que le plan donné et la surface donnée se trouvent représentés, le moyen général de solution consiste à trouver les points où un nombre suffisant de positions de la génératrice de la surface courbe percent le plan coupant; car il est clair qu'en joignant ces points par une courbe, cette courbe sera l'intersection demandée.

(*) Le lecteur pourra facilement démontrer que la méridienne de la surface donnée jouit de la propriété exposée n° 580, et qu'en conséquence cette méridienne est une hyperbole. Il s'ensuivra que la dénomination d'hyperboloïde de révolution à une nappe est d'accord avec ce qu'on a vu n° 209.

Les problèmes qui précèdent ont fait voir que le choix des plans de projection pouvait quelquefois simplifier beaucoup les constructions. Mais il n'est pas toujours possible de se donner ces plans : souvent ils sont fixés par les données du problème, et dans ce cas on est réduit à déterminer l'intersection demandée par le moyen que nous venons d'exposer, à moins que le cas particulier que l'on traite ne présente quelque procédé plus exact ou plus simple que le procédé général.

CHAPITRE II.

Des intersections de surfaces courbes.

454. **PROBLÈME** 1er. *Trouver l'intersection commune de deux cylindres.*

Supposons ces cylindres donnés par leurs traces horizontales, et soient (ABCD, B'D') celle du premier, (EFGH, F'H') celle du second, (AI, A'I') la génératrice du premier, et (EJ, E'J') la génératrice du second. Pl. 38.

455. Nous remarquerons que si l'on mène dans l'espace une suite de plans à la fois parallèles aux deux génératrices (AI, A'I'), (EJ, E'J'); chacun de ces plans coupera en général le premier cylindre suivant deux élémens, le second aussi suivant deux élémens, et que ces quatre élémens auront quatre points communs, qui seront des points de l'intersection demandée.

Il résulte de là un procédé fort simple pour obtenir cette intersection : car les plans auxiliaires, étant à la fois parallèles aux deux génératrices, sont nécessairement parallèles entre eux, en sorte que lorsqu'on connaît un de ces plans, on en mène aisément autant d'autres qu'on en veut.

456. Soit (K, K') un point quelconque de l'espace; menons par ce point deux droites, l'une (KL, K'L'), parallèle à la génératrice (AI, A'I'); l'autre (KM, K'M'), parallèle à la génératrice (EJ, E'J'); la première de ces droites percera le plan horizontal en un point L; la seconde le percera en un point M, et la droite LM sera la trace horizontale d'un des plans auxiliaires en question. Opérons au moyen de ce plan; il ne sera pas nécessaire pour cela de construire sa trace verticale.

Pl. 38. La trace LM, du plan auxiliaire que nous appellerons LM, coupera les traces ABCD, EFGH, des deux cylindres donnés, en quatre points (N, *n*), (O, *o*), (P, *p*), (G, *g*); par ces points menons les élémens (NN′, *n*N″), (OO′, *o*O″), (PP′, PP″), (GG′, *g*G″) : ils seront dans le même plan LM; donc ils se couperont en quatre points (Q, *q*), (R, *r*), (S, *s*), (T, *t*), de l'intersection demandée. En menant donc de nouvelles droites, parallèles à LM, que l'on considérera comme les traces de nouveaux plans auxiliaires, et sur lesquelles on exécutera les opérations que nous venons de faire sur LM, on détermiuera d'autres points de la courbe cherchée (*ae*QS*uziv*TR*ca*, *a′qsyz′xtra′*); et lorsque ces points seront en nombre suffisant, on décrira les projections de cette courbe.

457. Pour que les constructions soient satisfaisantes, il sera bon de prendre entre autres plans auxiliaires que l'on emploiera, 1° ceux comme AZ, dont la trace touchera la base ABCD d'un des cylindres donnés, 2° ceux, comme UV, qui contiennent un élément dont la projection horizontale VU′ sert de contour à la projection d'un des cylindres donnés; 3° enfin, ceux comme HY, qui contiennent un élément dont la projection verticale H′H″ sert de contour à la projection d'un de ces mêmes cylindres. On va voir, en effet, que ces plans auxiliaires donnent des points de la courbe cherchée qu'il importe d'obtenir, parce qu'ils font connaître immédiatement les deux projections, ou au moins l'une des deux projections, des tangentes à cette courbe suivant ces points. Opérons pour cela sur les plans auxiliaires AZ, UV, HY.

458. Le plan AZ n'aura de commun avec le cylindre dont la base est ABCD, et que pour abréger nous nommerons le cylindre ABCD, que l'élément (AI, A′I′), qui passe par le point A. Le même plan coupera le cylindre EFGH suivant deux élémens (EJ, E′J′), (ZZ′, Z″Z‴), lesquels rencontreront l'élément (AI, A′I′) en deux points (*a*, *a′*), (*z*, *z′*), de l'intersection demandée. Or, la droite AZ étant tangente en A au cercle ABCD, le plan auxiliaire AZ sera tangent au cylindre ABCD tout le long de l'élément (AI, A′I′); donc ce plan contiendra les facettes infiniment petites de ce cylindre auxquelles appartiennent les points (*a*, *a′*), (*z*, *z′*): donc il contiendra les élémens linéaires infiniment petits de la courbe cherchée qui correspondent à ces points. Mais ces élémens linéaires sont aussi sur des facettes du cylindre EFGH; de plus, ces facettes sont respectivement contenues dans les plans tangens à ce cylindre suivant les positions (EJ, E′J′), (ZZ′, Z″Z‴), de la génératrice : donc ces élémens linéaires sont

à la fois dans le plan auxiliaire AZ, et dans les plans tangens au cylindre EFGH suivant les droites (EJ, E'J',), (ZZ', Z''Z'''). Donc ils font partie de ces droites ; car elles sont les intersections des plans tangens dont il s'agit : donc enfin les droites (EJ, E'J'), (ZZ', Z''Z'''), sont les tangentes en (a, a') et (z, z') à la courbe demandée. Pl. 38.

Cette conséquence repose évidemment sur ce théorème, que la tangente en un point de l'intersection des deux surfaces est l'intersection des plans tangens à ces surfaces en ce point (152). Et comme elle résulte de ce que le plan auxiliaire AZ a pour trace une droite tangente à la base du cylindre ABCD, nous en conclurons que tout plan auxiliaire, dont la trace touche l'une des bases des deux cylindres donnés, a pour intersection avec l'autre cylindre des droites tangentes à la courbe demandée suivant les points de cette courbe que le plan auxiliaire contient.

459. Le plan auxiliaire UV ne donne pas, comme AZ, les deux projections de la tangente à l'intersection cherchée, il n'en donne que la projection horizontale VU'. Ce plan VU coupe le cylindre EFGH suivant un élément dont la projection VU' sert de contour à celle de ce cylindre ; il coupe le cylindre ABCD suivant les élémens dont les projections horizontales sont D*d* et U*u* ; ces trois projections VU', D*d* et U*u*, se coupent en *u* et *v* : donc les points *u* et *v* sont les projections horizontales de deux points de l'intersection (*ae*QS*uziv*TR*ca*, *a'qsyz'xtra'*). Cela posé, remarquons que les élémens linéaires infiniment petits, qui correspondent sur cette intersection aux deux points *u* et *v*, sont dans le plan vertical VU', tangent au cylindre EFGH, et nous en conclurons que les tangentes à la courbe (*ae*QS*uz*... *a'qs*...) se projettent horizontalement suivant VU' ; c'est-à-dire que le contour VU', qui correspond au plan auxiliaire UV, touche la courbe *ae*QS*uz*... suivant les points *u* et *v*, que le plan UV détermine.

460. Le troisième plan auxiliaire HY donne deux points de cette intersection, auxquels correspondent des tangentes qui ont pour projection verticale le contour H'H'', projection de l'élément qui passe par le point H. En effet, ce plan HY coupe le cylindre ABCD suivant deux élémens qui partent des points X et Y, et dont les projections verticales sont X'*x*, Y'*y* ; ces projections rencontrent H'H'' en deux points *x* et *y*, et ces points sont évidemment les projections verticales de deux points de l'intersection demandée. Or, les élémens linéaires infiniment petits qui correspondent aux points *x* et *y*, sont dans le plan H'H'', perpendiculaire au plan ver-

Pl. 38. tical; donc ces élémens prolongés, c'est-à-dire les tangentes à la courbe ($acQSuz\ldots$, $a'qsyz'\ldots$), suivant ces points, ont H'H'' pour projection verticale : donc enfin cette droite H'H'' touche en x et y la projection verticale $a'qsyz'xtra'$, de l'intersection demandée.

461. Dans l'exemple que nous avons choisi, chacun des deux cylindres donnés a des élémens qui ne rencontrent pas l'autre cylindre : on dit alors que ces cylindres s'*arrachent*, et l'on donne à leur intersection commune le nom de courbe d'*arrachement*. S'il arrivait au contraire que tous les élémens du plus petit rencontrassent le plus gros, ce dernier se trouverait percé par le premier de part en part; l'intersection se composerait de deux branches, l'une d'entrée du petit cylindre dans le grand, et l'autre de sortie, et l'on dirait qu'il y a *pénétration* entre ces deux cylindres.

462. En général, une branche de l'intersection de deux surfaces est une *branche de pénétration*, lorsque toutes les positions de la génératrice d'une de ces surfaces ont un point sur cette branche; parce qu'il arrive alors qu'une de ces surfaces traverse entièrement l'autre. Dans le cas contraire, c'est-à-dire quand les génératrices de l'une des surfaces n'ont pas toutes un point sur une branche de leur intersection, cette branche est une *branche d'arrachement;* parce que les deux surfaces, au lieu de présenter une pénétration, ne font que s'entamer mutuellement (*). On doit sentir d'après cela, et nous en verrons des exemples, que l'intersection de deux surfaces peut se composer de plusieurs branches, les unes de pénétration, et les autres d'arrachement.

463. Si l'on imagine que le cylindre EFGH soit sensiblement plus petit et plus rapproché du plan vertical qu'il ne l'est, il coupera évidemment le cylindre ABCD suivant deux branches de pénétration, l'une que l'on appelle la *courbe d'entrée*, et l'autre que l'on appelle la *courbe de sortie.* La première sera le lieu des points où les élémens du petit cylindre entreront dans le grand; et la seconde, celui des points où ces mêmes élémens sortiront du grand cylindre. Si l'on conçoit que le petit cylindre grossisse peu à peu, il arrivera bientôt qu'un de ces élémens, au lieu de percer le gros cylindre en deux points, ne fera plus que le toucher en un point uni-

(*) On pourrait objecter qu'une surface étant susceptible de plusieurs générations, une branche d'intersection de deux surfaces peut être, sous le rapport d'une génération, une branche de pénétration, et, sous le rapport d'une autre génération, une branche d'arrachement. Cela est vrai; mais comme on n'envisage guère une surface que sous le rapport de sa génération la plus simple, on n'est jamais embarrassé pour appliquer les noms d'*arrachement* et de *pénétration*.

que, qui appartiendra tout-à-la-fois à la courbe d'entrée et à celle de sortie; Pl. 38.
en sorte que ces deux courbes ne feront plus qu'une même branche, présentant un point multiple. Après un nouvel accroissement du cylindre EFGH, les élémens voisins du point multiple, et l'élément qui donnait ce point, n'auront plus de points communs avec le cylindre ABCD; la réunion des deux branches de l'intersection en une seule sera tout-à-fait opérée; les deux cylindres s'arracheront mutuellement, et leur intersection sera de la forme de celle que l'épure représente.

464. Il est facile de voir si les deux cylindres donnés se coupent par un arrachement, ou par une pénétration, sans construire leur ligne d'intersection. En effet, pour qu'ils s'arrachent, il faut, d'après ce que nous avons dit, que chacun de ces cylindres ait des élémens qui ne percent pas l'autre, ce qui exige que parmi tous les plans parallèles à leurs élémens il y en ait qui coupent le cylindre le plus gros sans couper le plus petit, et d'autres qui coupent le plus petit sans couper le plus gros. Pour qu'il y ait pénétration, au contraire, il faut qu'un des cylindres soit percé par tous les élémens de l'autre, ce qui exige que tout plan auxiliaire qui coupe le dernier, coupe aussi le premier. Or, la trace VU, d'un plan auxiliaire, coupe la base d'un des cylindres donnés, quand le plan et le cylindre se coupent, et réciproquement; donc on devra conclure de ce qu'il y a des parallèles à LM qui coupent la base EFGH, sans couper la base ABCD, et d'autres qui coupent la base ABCD, sans couper EFGH, que ces cylindres s'arrachent. Et si toutes les parallèles à LM, qui coupent EFGH, coupaient ABCD, il y aurait pénétration du cylindre ABCD par le cylindre EFGH (462).

Dans ce dernier cas, et les deux cylindres ayant toujours, comme dans l'épure, des traces horizontales circulaires, chaque élément du cylindre EFGH percerait le cylindre ABCD en deux points, et l'intersection serait composée, comme nous l'avons dit, de deux branches de pénétration, une branche d'entrée et une branche de sortie; c'est-à-dire qu'il y aurait pénétration double, de l'une des surfaces données par l'autre.

465. *Exécution de l'épure.* La distinction des parties vues et cachées de l'intersection demandée exige beaucoup d'attention, quoique les règles suivantes, d'après lesquelles on détermine ces parties, soient d'une grande simplicité.

1re Règle. *Deux élémens vus des deux cylindres donnés se coupent suivant un point vu de l'intersection de ces cylindres.*

2ᵉ Règle. *Deux élémens, tous deux cachés ou dont l'un est caché, se coupent suivant un point caché.*

Ces règles, qui sont fondées sur ce qu'il faut qu'aucune des lignes qui passent par un point ne soit cachée, pour que ce point soit vu, s'appliquent à chaque projection, ainsi qu'on va le voir.

Pl. 38. Les élémens qui partent des points A, E et Z, sont vus en projection horizontale; donc les points a et z sont vus. Les mêmes élémens sont vus en projection verticale; donc les points a' et z' sont vus. Des deux élémens qui partent des points N et P, celui qui part de ce dernier point est caché sur le cylindre EFGH, tant en projection horizontale qu'en projection verticale, donc le point (Q, q), où ils se coupent, n'est vu ni en projection horizontale, ni en projection verticale. Les deux élémens qui partent des points O et G ne sont vus ni en projection horizontale, ni en projection verticale; donc le point (T, t'), où ils se coupent, a ses deux projections cachées.

Nous ne donnerons pas d'autre exemple; on sait, d'après ce qu'on a vu précédemment (170—175), si un élément des cylindres donnés est vu ou n'est pas vu; ainsi, rien ne pourra embarrasser le lecteur. Nous ferons seulement remarquer que les points de séparation des parties vues et cachées sont toujours situés sur les contours des projections des cylindres.

466. L'exécution de l'épure exigera encore que l'on détermine les parties des élémens vus d'un cylindre qui seront cachées par l'autre cylindre. On fera usage pour cela des plans auxiliaires. S'il s'agit, par exemple, de l'élément (AI, A'I') du cylindre ABCD, on remarquera que le plan auxiliaire AZ laisse au-dessous de lui toute la portion de surface qui s'appuie sur l'arc EFGHZ, mais qu'il est au-dessous de la portion qui passe par l'arc EZ; et l'on en conclura que la projection horizontale AI de l'élément (AI, A'I') est cachée de a en z, c'est-à-dire dans l'intervalle des deux élémens EJ, ZZ', qui partent des extrémités E et Z de l'arc EZ. Pour la projection verticale, on remarquera que la même portion de surface, qui passe par l'arc EZ, est en avant du plan AZ, et qu'elle cache par conséquent, de a' en z', la projection verticale A'I', de l'élément (AI, A'I') situé dans ce plan. S'il s'agit de l'élément (NN', nN''), situé dans le plan auxiliaire LM, on verra que ce plan est au-dessous et derrière la surface cylindrique qui a pour base l'arc GHZEP, et l'on en conclura que l'élément en question est caché sur chaque projection dans la partie où il traverse la projection du cylindre EFGH.

467. *Problème 2. Trouver l'intersection d'un cône et d'un cylindre.*

Soient ABCD la trace horizontale du cylindre donné, BE la direction des élémens de ce cylindre en projection horizontale, A'F leur direction en projection verticale, GHIK la trace horizontale du cône donné, et (L, L') le sommet de ce cône. Pl. 39.

468. Il est évident que si l'on mène, par le sommet (L, L') du cône, un système de plans parallèles aux élémens du cylindre, ils couperont les deux surfaces données suivant des droites qui se rencontreront suivant des points de la commune intersection demandée. D'après cela, menons par le point (L, L') la droite (LM, L'M') parallèle aux élémens du cylindre; elle percera le plan horizontal en un point (M, M'), et toutes les droites qui seront menées par ce point seront des traces de plans du système en question.

Soit BMGI l'une de ces traces; elle coupera les bases des deux surfaces données suivant les points B, N, G, I. Le plan correspondant à cette trace coupera ces surfaces suivant des élémens dont les projections horizontales seront, pour le cylindre, les droites BE, Nc, et pour le cône, les droites GLE, ILQ. Or, ces élémens, situés dans un même plan, se rencontreront en un même point, dont les projections horizontales seront nécessairement en E, Q, O et P; et comme ces points appartiendront à l'intersection cherchée, leurs projections E, Q, O, P, appartiendront évidemment aux projections horizontales QRE, SPO, des branches de cette intersection.

On construira de la même manière les points des projections verticales des mêmes branches. Ainsi, ayant mené la trace AMH d'un plan auxiliaire, on aura les points A, C, H, où les élémens correspondans des surfaces données perceront le plan horizontal, on en déduira les projections verticales A'F, C'U et H'L', de ces élémens; ces projections se croiseront suivant des points U et F, et il est clair que ces points appartiendront aux projections verticales FXY, UVT, des branches de l'intersection demandée.

En menant donc un nombre suffisant de plans auxiliaires, tels que BMI et AMH, sur lesquels on exécutera les constructions fort simples qui viennent d'être décrites, on trouvera autant de points qu'on en voudra des deux projections de cette intersection, et l'on pourra bientôt tracer ces deux branches (QRE, XYF), (SPO, UVT).

469. Pour opérer avec intelligence, il faudra que l'on prenne parmi les plans auxiliaires qu'on emploiera, 1°. les plans, comme AMH, dont les traces toucheront une des bases des deux surfaces données; 2°. ceux, comme BMI, dont les traces passeront par un point, tel que le point N, où le contour Nc de la projection horizontale d'une des surfaces données touche la base ABCD de cette surface; 3°. enfin, ceux dont les traces passeront par un point, tel que le point *d*, qui est commun au contour *d*L' de la projection verticale d'une des mêmes surfaces, et à la base GHIK de cette surface. Ces plans auxiliaires, tout à fait analogues à ceux dont il est question n° 457, donneront, comme ces derniers, des points de la courbe cherchée, et l'une des deux projections, ou les deux projections, de la tangente correspondante (457—460).

Le plan AMH, par exemple, est tangent au cône suivant l'élément qui passe par le point H, et il contient les points de la courbe demandée qui ont leurs projections verticales en F et U. Or, concevons par ces points des tangentes à cette courbe, elles seront dans le plan AMH; mais elles seront aussi dans les plans tangens au cylindre suivant les élémens qui partent des points A et C; donc elles seront les intersections de ces plans tan-

Pl. 39. gens et du plan AMH : c'est-à-dire qu'elles coïncideront avec les élémens qui partent des points A et C ; car ces élémens sont évidemment les intersections dont il s'agit. Donc enfin les projections horizontales et verticales de ces mêmes élémens seront des tangentes à l'intersection demandée, suivant les points de cette intersection qui se projettent en F et U. Pour ne pas rendre l'épure trop confuse, on n'a mené que les projections verticales A'F, C'U, de ces tangentes.

Examinons, pour le second exemple, les résultats que donne le plan auxiliaire BMI. Ce plan coupe le cylindre suivant l'élément qui part du point N, et dont la projection Nç sert de contour à la projection horizontale du cylindre; or, le plan vertical qui correspond à cet élément est tangent au cylindre; donc il contient l'élément linéaire infiniment petit qui correspond au point P de l'intersection, situé dans le plan BMI : donc le plan NP contient la tangente à cette intersection, menée par celui de ses points qui se projette en P. Mais tout ce que ce plan contient est projeté horizontalement suivant sa trace ; donc enfin la droite NP est tangente en P à la ligne SPO.

Ces deux exemples suffiront pour montrer le parti que l'on peut tirer des plans auxiliaires dont il vient d'être question.

470. Dans le cas que l'épure traite, le sommet du cône est dans l'intérieur du cylindre, en sorte que tous les élémens du cône ont un point sur chacune des branches (QRE, XYF), (SPO, UVT), de l'intersection demandée. Ces branches sont, d'après ce que nous avons précédemment dit (462), des branches de pénétration.

471. Lorsqu'il y a pénétration, ou lorsqu'il y a arrachement, entre les deux surfaces données, il est facile de le reconnaître sans construire leur intersection : le simple examen de la disposition des plans auxiliaires suffit pour cela. En effet, menons par le point M les traces MH, Mb, tangentes à la base HIKb du cône ; et faisons remarquer que dans un système de projections obliques, faites sur le plan horizontal de telle manière que le point M soit la projection du sommet (L, L'), le cylindre donné aura pour projection sa trace ABCD, et le cône les angles indéfinis bMH, AMr, que déterminent les tangentes MH, Mb. On sentira que l'intersection des surfaces données se trouve représentée, dans ce système de projections, par les arcs Cn, Ar, de la trace ABCD ; et comme le cône n'a pas un élément dont la projection oblique BMNI ne traverse les arcs Cn et Ar, on en conclura que les branches Cn et Ar de l'intersection sont des branches de pénétration.

Si les projections obliques des élémens ne rencontraient pas toutes une branche quelconque Ar de l'intersection, cette branche serait une branche d'arrachement (*).

472. Nous ferons observer en passant qu'il peut y avoir arrachement entre un cylindre et un cône dont les bases sont circulaires ou elliptiques, quoique ces surfaces aient pour intersection une courbe composée de deux branches, ce qui n'aurait pas lieu pourdeux

(*) Cette considération des projections obliques, appliquée à l'intersection de deux cylindres, fera aussi connaître immédiatement si cette intersection est un arrachement ou une pénétration. On supposera que les projections soient faites parallèlement aux élémens de l'un des cylindres; sa projection ne sera autre chose que sa trace, et l'intersection cherchée ayant pour projection oblique les arcs de cette trace compris entre les plans auxiliaires qui enfermeront la trace du second cylindre, on verra si ces arcs sont rencontrés par les projections obliques de tous les élémens de ce dernier cylindre. S'ils le sont, l'intersection sera une pénétration, et s'ils ne le sont pas, ce sera un arrachement.

cylindres. Cela tient à ce que chaque nappe du cône peut rencontrer le cylindre suivant une branche particulière de leur intersection. Pl. 39.

473. Pour décrire facilement cette intersection, et pour être bien sûr de ne pas faire passer une branche par un point qui ne lui appartienne pas, il faut, pour chaque branche, passer en revue les points obtenus, en examinant soigneusement les élémens sur lesquels ces points sont situés, et en suivant, pour cela, l'ordre où ces mêmes élémens sont présentés par l'une des bases des deux surfaces données. Dans l'exemple que nous avons choisi, il faudra procéder en suivant la base du cône, plutôt qu'en suivant la base du cylindre, par la raison que tous les élémens du cône perçant le cylindre, l'examen à faire ne présentera aucune discontinuité. Supposons que l'on parte du plan auxiliaire extrême AH, l'élément qui part du point H donnera un point de la courbe d'entrée; celui qui part du point I donnera un autre point de la même courbe; ceux qui partent des points K, *c*, *b*, *e*, G, *a*, jusqu'au point de départ H, en donneront d'autres, et tous ces points se présenteront, successivement, dans le même ordre que si l'on suivait la branche d'entrée en partant de l'élément LH pour revenir à cet élément, ce qui indiquera, d'une manière sûre, comment le trait qui doit réunir ces points devra être mené. Cet examen, appliqué à chaque branche et à chaque projection, préviendra les erreurs que la multiplicité des points obtenus pourrait entraîner.

474. *Exécution de l'épure.* Une des principales conditions auxquelles on doit se proposer de satisfaire dans l'exécution d'une épure, c'est que les données, les constructions et les résultats, s'y montrent clairement, et sans qu'une partie de l'épure soit chargée de lignes tandis qu'une autre en serait vide. C'est pour nous assujettir à cette condition que nous avons employé deux plans auxiliaires BI, AH, l'un pour déterminer les projections horizontales P et Q, de deux points de l'intersection cherchée; l'autre, pour avoir les points T et F de la projection verticale de cette intersection. Dans le cas qui nous occupe, les données ne permettaient pas que les élémens d'intersection d'un même plan auxiliaire, avec les surfaces données, pussent être projetés horizontalement et verticalement sans rendre l'épure confuse.

C'est aussi par cette raison que nous n'avons pas construit les traces des surfaces données sur le plan vertical.

475. Occupons-nous maintenant de la mise au trait des lignes de l'épure. Il est évident, d'abord, que la portion NDW de la trace du cylindre est cachée par les élémens de la partie NZW; et que la partie WZ de cette même trace est cachée par la nappe supérieure du cône. Il est clair aussi que l'arc *abc* de la base de ce cône n'est pas vu.

Quant aux parties vues et cachées de l'intersection demandée, elles se déterminent par les mêmes règles que dans le cas de deux cylindres (465), en ayant soin de faire attention que les élémens d'un cône qui sont vus sur l'une de ses nappes ne l'étant pas sur l'autre (190), on doit, lorsque l'intersection s'étend sur les deux nappes, considérer ces deux nappes chacune en particulier.

D'après cela, sur chaque nappe du cône, deux élémens vus des surfaces données se rencontrent en un point vu de l'intersection; et deux élémens cachés, ou un élément caché et un élément vu, se rencontrent en un point caché de la même intersection.

Appliquons ces règles à chacune des projections de l'épure, et commençons par consi-

Pl. 39. dérer la nappe inférieure du cône. Les élémens qui ont pour projections horizontales les droites IL, NP, étant vus sur le plan horizontal, lorsque l'on suppose chaque surface isolée, le point P, projection horizontale du point où se coupent ces deux élémens, doit appartenir à un arc plein de l'intersection demandée. De même, les élémens H'U, C'U, étant vus sur le plan vertical, le point U, où ils se coupent, appartiendra à un arc vu de la projection verticale de cette intersection.

Pour la nappe supérieure, l'élément LQ, prolongement de LI, sera caché; ainsi le point Q de l'intersection, situé à la rencontre de LQ et de BQ, sera caché. En projection verticale, l'élément A'F sera vu, et l'élément L'F, prolongement de H'L', sera caché; donc le point F sera caché.

En continuant ainsi, on déterminera aisément les parties vues et cachées de l'intersection demandée.

476. Il nous resterait à indiquer comment on détermine les parties de chaque élément de l'une des surfaces données qui sont cachées par l'autre; mais comme cette détermination n'offre aucune difficulté, nous ne nous y arrêterons pas. Nous préviendrons seulement que les élémens qui servent de contour aux projections de ces surfaces commencent en général à être vus, ou cessent d'être vus, aux points où ils sont tangens aux branches de l'intersection.

477. PROBLÈME 3. *Deux surfaces coniques étant données, on demande leur intersection commune.*

Pl. 40. Prenons pour exemple deux surfaces coniques à bases circulaires, et choisissons le plan vertical de manière qu'il soit à la même distance des deux sommets de ces surfaces. D'après cela, soient $(Ugf''nsd, U's')$ la base de la première de ces mêmes surfaces, (e, e') son sommet, $(XcaVb, X'V')$ la base de la seconde, et (i, i') son sommet.

Nous remarquerons que si l'on coupe les deux surfaces données par un système de plans auxiliaires menés par les sommets (e, e'), (i, i'), on aura pour sections des élémens de ces surfaces qui se rencontreront suivant des points de l'intersection demandée. Or, tous ces plans passeront par la droite $(ei, e'i')$, dont la trace horizontale est le point (m, m'); donc ils auront pour traces horizontales des droites passant par le point m.

Soit cm la trace d'un de ces plans; elle coupera les bases des deux surfaces données suivant les points c, g, k, n, et le plan auxiliaire correspondant coupera ces surfaces suivant quatre élémens ci, ki, eg, en, qui se couperont suivant les quatre points p, q, r, o, de la projection horizontale de l'intersection demandée. Pour avoir les projections verticales correspondantes aux projections p, q, r, o, on mettra les points c, g, k, n, en projection verticale en c', g', k', n'; on menera les élémens $c'i', k'i', g'e', n'e'$, et les points p', q', r', o', où ils se couperont, seront les projections cherchées.

En menant de nouvelles traces de plans auxiliaires, telles que cm, on déterminera de nouveaux points de l'intersection demandée: il ne s'agira plus, pour décrire les branches de cette intersection, que de bien distinguer les points qui devront être joints les uns avec les autres.

478. D'abord on verra facilement, par l'inspection de la projection verticale, que parmi les points obtenus (p, p') (q, q'), (r, r'), (o, o'), le premier et les deux derniers apparttien-

nent à l'intersection des nappes inférieures des cônes, et que le point (q, q') appartient à l'intersection de leurs nappes supérieures. Mais comme deux nappes (par exemple ici les deux nappes inférieures) peuvent se couper suivant deux branches de courbes, il faudra examiner si les points d'intersection de ces nappes appartiennent à une seule branche, ou à plusieurs branches, et, dans le dernier cas, reconnaître les points qui appartiennent à une même branche. Pl. 40.

Pour cela, on examinera de proche en proche les résultats obtenus par le moyen des divers plans auxiliaires; on trouvera que celui de ces plans qui vient après *cm*, a des points analogues aux points *c*, *g*, *k*, *n*, et qu'il détermine un point d'intersection analogue au point *p*, un point analogue au point *q*, un point analogue au point *r*, et un point analogue au point *o*. On marquera d'un même signe tous les points liés entre eux par la même loi d'analogie, et il est évident qu'ils appartiendront à une même branche de courbe; car, si l'on multipliait à l'infini les plans auxiliaires, les points marqués d'un même signe se suivraient sans solution de continuité.

Lorsqu'on sera arrivé à un plan auxiliaire *mb*, tangent à l'une des bases des deux surfaces données en un certain point *d*, on remarquera que les points *n* et *g*, où la trace *cm* coupe la base $gf''nd$, sont réunis en un seul point *d*; et que les points *k* et *c* sont situés, l'un en *f*, et l'autre en *b*. On en conclura que le point *r* a pour analogue le point A; que le point *o* a aussi pour analogue le point A; et, par conséquent, que la branche de courbe qui passe par les points analogues au point *r*, se réunit en A avec la branche de courbe qui passe par les points analogues au point *o*. C'est-à-dire que les points *r* et *o* sont analogues entre eux et appartiennent à une seule et même branche.

Les mêmes observations montreront que le point B réunit deux séries de points; l'une formée des points analogues au point *p*; l'autre formée de points analogues entre eux, qui ne sont fournis que par les plans auxiliaires très voisins de *mb*. Il sera parlé plus loin de ces derniers points (486).

479. Après l'examen que nous venons de faire, on saura que l'intersection demandée est composée, dans le cas pris pour exemple, 1°. d'une branche d'intersection $(JuZqJ', Z'q'y')$ des deux nappes supérieures : ce sera une branche d'arrachement (462); car elle n'aura de points que sur une partie des élémens de chacune des surfaces données; 2°. d'une branche d'intersection $(vroxA, v'r'A'x')$ des deux nappes inférieures : ce sera une branche de pénétration; car elle aura un point sur chaque élément du cône dont le sommet est en (e, e'); 3°. enfin, d'une branche d'intersection $(z'z''fBtpuz, t'B'f')$ des deux nappes inférieures : ce sera une branche d'arrachement; car elle n'aura de points que sur une partie des élémens de chacune des deux surfaces données.

480. Comme les nappes supérieures et inférieures des deux cônes (e, e'), (i, i'), se prolongent jusqu'à l'infini, il est assez présumable que les branches d'arrachement s'étendent aussi à l'infini. Pour nous en assurer, construisons les élémens parallèles de ces cônes.

Pour cela, imaginons que l'un des cônes donnés, celui dont le sommet est (i, i'), par exemple, se meuve parallèlement à lui-même, de manière que le sommet (i, i') vienne coïncider avec le sommet (e, e'). Dans cette position, les deux cônes auront en général un certain nombre d'élémens communs, et il est clair qu'en ramenant le cône mobile dans sa première position, les élémens qui coïncidaient se trouveront, après le mouvement, des

Pl. 40. élémens parallèles. Dans l'épure, les cônes donnés ont des cercles pour bases : et comme les sections faites dans un cône, par des plans parallèles, sont des courbes semblables (*voyez* la Note 5), le cône (e, e') est coupé par le plan horizontal MN suivant un cercle CDE facile à déterminer; et le cône (i, i'), lorsque son sommet est en (e, e'), est coupé par le même plan MN suivant le cercle FGHI (*). Ces deux cercles CDE, FGHI, se coupent en deux points K et L, et les élémens $\mathrm{K}ef''$, $\mathrm{L}e\mathrm{P}$, sont ceux du cône (e, e') auxquels il correspond, sur le cône (i, i'), des élémens parallèles $\mathrm{R}ia$, $\mathrm{S}i\mathrm{Q}$. Si l'on veut trouver la projection verticale $f'''\mathrm{K}'$ d'un de ces élémens $f''e\mathrm{K}$, il ne s'agira que de mettre le point f'' en projection verticale en f''', et de mener $f'''e'\mathrm{K}$.

De ce que les deux surfaces données ont des élémens parallèles, il s'ensuit évidemment que leur intersection a des points à l'infini.

481. Pour bien concevoir la situation de ces points et la forme générale de l'intersection demandée, concevons que la génératrice du cône (e, e') parte de la position $(es, e's')$, qu'elle se meuve en avançant vers le point n pour décrire ce cône, et suivons-la dans son mouvement, en examinant les positions des points où elle percera successivement le cône (i, i').

D'abord il est clair qu'elle ne cessera pas de passer par un des points de la branche de pénétration $(ox\mathrm{A}vr,\ x'o'\mathrm{A}'r'v')$; ainsi, nous n'avons à nous occuper, dans l'examen que nous allons faire, que des branches d'arrachement.

Dans sa position initiale, la génératrice $(es, e's')$ percera le cône (i, i') au point (t, t'); lorsqu'elle sera en $(en, e'n')$, elle le percera en (p, p'); lorsqu'elle sera en $(\mathrm{K}ef'', \mathrm{K}'e'f''')$, elle sera parallèle à l'élément $\mathrm{R}ia$, et elle rencontrera cet élément à l'infini par ses deux extrémités : c'est-à-dire qu'elle donnera un point de la branche d'intersection $(tpuz, t'p'\mathrm{B}')$, situé à l'infini au-dessous du plan horizontal, et un point de la branche $(yqw, y'q')$, situé à l'infini au-dessus du plan horizontal. En continuant d'avancer, la génératrice ne rencontrera plus la nappe inférieure du cône (i, i'), mais elle percera sa nappe supérieure. Lorsqu'elle sera en $(eg, e'g')$, le point d'intersection sera en (q, q'); et lorsqu'elle sera en $(e\mathrm{U}, e'\mathrm{U}')$, il sera en $(\mathrm{Z}, \mathrm{Z}')$. En continuant de la faire mouvoir, les mêmes circonstances se représenteront : car le plan vertical ei divise évidemment les deux cônes donnés en deux parties symétriques; mais ce sera dans un ordre contraire.

482. Pour construire avec exactitude l'intersection qui fait l'objet de ce problème, il sera bon d'employer, parmi les plans auxiliaires, ceux comme md, qui seront tangens à la base $f''nsd\mathrm{U}$; parce que ces plans donneront à la fois des points de la courbe cherchée, et les tangentes à cette courbe suivant ces points. En effet, le plan auxiliaire md est tangent au cône (e, e') suivant l'élément $(ed, e'd')$, il coupe le cône (i, i') suivant les élémens $(if, i'f_1')$, $(ib, i'b')$, et il détermine les points $(\mathrm{A}, \mathrm{A}')$, $(\mathrm{B}, \mathrm{B}')$, de l'intersection de-

(*) La droite $(ih, i'h')$, menée par le sommet (i, i') d'un cône, et par le centre (h, h') de sa base, contient les centres de toutes les sections parallèles à cette base. D'après cela, si l'on mène par le point (e, e') la droite $(ex, e'x'')$, parallèle à $(hi, h'i')$, elle percera le plan MN en un point (x, x''), qui sera le centre du cercle FGHI. Pour décrire ce cercle, il faudra encore obtenir un de ses points; or si l'on mène par le point (e, e') une droite $(el, e'l')$, parallèle à un élément quelconque $(im, i'\mathrm{T})$, cette droite sera un élément du cône (i, i') ramené en (e, e') : donc elle percera le plan MN en un point (l, l') du cercle FGHI.

mandée : or, les tangentes à cette intersection suivant ces points sont situées, d'une part, dans le plan auxiliaire *md*, d'autre part, dans les plans tangens au cône (i, i') suivant les élémens $(if, i'f')$, $(ib, i'b')$; et comme ces élémens sont les intersections de ces plans tangens et du plan *md*, il en résulte que ces mêmes élémens sont les tangentes cherchées. Pl. 40.

483. Les plans auxiliaires menés par les points *s*, V, U, X, par lesquels passent les élémens qui servent de contours aux projections verticales de ces cônes, donnent à la fois des points de la courbe cherchée, et les projections verticales des tangentes qui correspondent à ces points. Mais, dans le cas choisi pour exemple, tous ces plans se confondent dans le plan vertical *m*X, en sorte que pour un point quelconque (v, v'), obtenu par le moyen du plan *m*X, la tangente correspondante est comprise dans deux plans e'U', $v'i'$, perpendiculaires au plan vertical : d'où l'on voit que cette tangente est perpendiculaire au plan *m*X, et qu'elle se projette verticalement en v'. On trouverait de même que les courbes $v'r'A'x'$, $t'B'f'$, $Z'q'y'$, ont leurs tangentes en x', t' et Z', perpendiculaires au plan *m*X.

Cette particularité provient de ce qu'on a pris pour plan vertical un plan également distant des sommets (e, e'), (i, i'); car il en résulte que le plan *ei*, ou *m*X, divise les deux surfaces données, chacune en deux parties symétriques, et que la partie de l'intersection, située en avant du plan *m*X, a même projection verticale que celle située en arrière de ce plan, en sorte que la projection verticale de cette intersection s'arrête court en v', x', t', et Z'. On verra cependant (521) un procédé qui donne les tangentes correspondantes à ces points.

484. Si les plans *m*X, *m*U, *m*V, *ms*, différaient les uns des autres, les points de l'intersection fournis par ces plans auraient des tangentes dont les projections verticales seraient les droites i'X', e'U', i'V', $e's'$; parce que ces plans sont les plans analogues du plan auxiliaire employé n° 460.

485. Si les sommets des cônes ne se projetaient pas horizontalement dans l'intérieur de leurs bases, ou ce qui revient au même, si les projections horizontales de ces cônes, n'étant pas indéfinies dans tous les sens, se trouvaient bornées à des contours, les plans auxiliaires qui passeraient par les points de contact de ces contours et des bases donneraient des points de l'intersection cherchée, auxquels correspondraient des tangentes dont ces mêmes contours seraient les projections horizontales. Il sera aisé d'en sentir la raison, si l'on a bien compris ce que nous avons dit précédemment (459).

486. Avant de passer à l'exécution de l'épure, nous ferons remarquer que les plans auxiliaires compris entre les plans *dm* et PQ*m* donneront des points de la branche d'arrachement des nappes inférieures, situés sur l'arc B*z*', entre le point B et l'infini. Ces points, qui n'ont pas d'analogues parmi les points *p*, *q*, *r*, *o*, forment une branche particulière qui s'unit à la branche B*tp* suivant le point B. Il était nécessaire d'en parler pour que l'on sût déterminer les points de l'arc B*z*'.

487. ***Exécution de l'épure.*** On suppose que les cônes donnés soient terminés, d'une part, au plan horizontal de projection, d'autre part, au plan MN. Ce dernier plan coupe le cône (e, e') suivant le cercle CDE, et le cône (i, i') suivant le cercle RSYY'. Ces deux cercles occupant la partie supérieure du système sont nécessairement vus, en projection horizontale, ainsi que la projection J*u*Z*q*J', de la courbe d'arrachement des deux nappes

Pl. 40. supérieures. Les autres branches de l'intersection, et la base $f''nsdU$ du cône (e, e'), sont évidemment cachées en projection horizontale. Quant à la base $aVbX$ du cône (i, i'), il est clair qu'elle n'est vue que dans les deux arcs situés au dehors des cercles CDE, RSYY'.

En projection verticale, les parties vues et cachées sont faciles à déterminer.

On a indiqué sur l'épure divers élémens, dont il a été question précédemment, en lignes pleines et ponctuées, selon que leurs parties sont vues ou sont cachées.

Comme on a supposé que les deux cônes ne s'étendaient pas au-delà des plans $X'm'$, MN, on a indiqué sur la projection horizontale, en lignes ordinaires de construction, les parties zu, $z'z''$, yJ', $y''J$, de l'intersection demandée, qui sont au-dessous ou au-dessus de ces plans.

488. *Problème 4. Deux surfaces de révolution dont les axes ont un point commun, étant données, on demande leur intersection commune.*

Prenons pour exemple un hyperboloïde et un paraboloïde de révolution. Et pour que les constructions soient les plus simples possibles, choisissons les plans de projection de manière que le plan horizontal soit perpendiculaire à l'un des axes de révolution, et que le plan vertical leur soit parallèle à l'un et à l'autre, ce qui évidemment sera toujours possible.

Pl. 41. D'après cela, soient (A, A'A") l'axe de l'hyperboloïde, B'C'DE la méridienne principale de cet hyperboloïde, (GF, G'F') l'axe du paraboloïde, et (GF, HIKLMN') sa méridienne parallèle au plan vertical. Le point (A, O) sera celui où se rencontreront les deux axes de révolution.

489. Pour construire les points de l'intersection demandée, il faut d'abord choisir un système de surfaces auxiliaires qui déterminent, sur les surfaces données, une suite de sections les plus simples possibles. Or, après un peu de réflexion, on reconnaîtra facilement que ces surfaces auxiliaires sont les sphères concentriques dont le centre est en (A, O).

Soit DC'KM le grand cercle d'une de ces sphères situé dans le méridien GF. Il est clair que si l'on fait tourner ce cercle autour de l'axe (A, A'A"), en même temps que l'hyperbole B'C'DE, il engendrera la sphère à laquelle il appartient, et que la courbe B'C'DE engendrera l'hyperboloïde donné, en sorte que les points C' et D, communs aux génératrices DC'KM, B'C'DE, décriront des cercles horizontaux C'P, DN, communs à la sphère et à l'hyperboloïde. En imaginant de même que le cercle DC'KM tourne autour de l'axe (GF, G'F'), en même temps que la parabole HIKLMN', ce cercle engendrera la même sphère auxiliaire, la parabole engendrera le paraboloïde, et les points I et K engendreront deux cercles IQ, KM, communs à ces deux surfaces. Il suit de là que les quatre cercles DN, C'P, IQ, KM, dont les plans sont perpendiculaires au plan vertical, et qui appartiennent, les deux premiers à l'hyperboloïde, les deux derniers au paraboloïde, étant situés sur une même sphère, se couperont suivant des points projetés verticalement en s, en s' et en u'.

Il sera facile de construire leurs projections horizontales. Pour avoir celles des points qui sont projetés en s', par exemple, on construira la projection horizontale aCs du cercle C'P; on menera la droite $s'x$ perpendiculaire à la ligne de terre, et les points s et x, où

cette ligne coupera le cercle xCs, seront les projections horizontales cherchées, en sorte que les deux points (x, s'), (s, s'), seront deux points de l'intersection demandée. Pl. 41

En menant de nouvelles sphères auxiliaires, on obtiendra de nouveaux points de cette intersection, et bientôt on pourra construire les deux branches $(yz'az'', y'za')$, $(rstvux, r's't'u'v')$, qui la composent.

490. *Exécution de l'épure.* On suppose que les deux surfaces données soient terminées au plan horizontal EE', qui coupe l'hyperboloïde suivant le cercle vu (RR'R", EE'), et le paraboloïde suivant la courbe aussi vue (VXY, V'N').

L'intersection demandée a ses deux branches vues en projection verticale. En projection horizontale, la branche inférieure est entièrement cachée, et la branche supérieure n'est vue que dans la partie $z'yz''$, qui est au-dessus de la gorge $z'Zz''$ de l'hyperboloïde.

Il est clair que les arcs $r'y', y'a', a'v', v'r'$, des méridiens des surfaces données, seront compris dans l'intérieur de ces surfaces. Ils devront par conséquent être ponctués.

Pour que l'épure soit bien complète, il faudra construire le contour TUT' de la projection horizontale du paraboloïde (387). La partie de ce contour comprise dans le cercle RR'R" sera évidemment cachée, et il est clair que l'arc Z'Z", de la trace Z'Z"S'S de l'hyperboloïde, sera aussi cachée.

Nous laisserons au lecteur le soin de construire les deux lignes VXY, TUT'.

491. Problème général. *Étant données deux surfaces quelconques* S *et* s, *on demande leur intersection commune.*

Pour résoudre ce problème, on choisira d'abord un système de surfaces auxiliaires qui aient pour intersections avec les surfaces S et s des lignes faciles à déterminer. Si la nature particulière des surfaces données n'indique pas, parmi les surfaces courbes, de telles surfaces auxiliaires, on prendra pour surfaces auxiliaires des plans. Et si aucun système de plans ne présentait un avantage remarquable, sous le rapport de la construction des intersections de ces plans avec les surfaces S et s, on prendrait pour plans auxiliaires, ainsi que nous l'avons supposé n° 144, des plans horizontaux. Dans tous les cas, on pourra prendre des surfaces planes pour surfaces auxiliaires, et ce ne sera que pour simplifier les constructions qu'il sera quelquefois nécessaire de recourir à des surfaces courbes.

Ce système choisi, on menera une suite de surfaces auxiliaires $\Sigma, \Sigma', \Sigma''\ldots$; ces surfaces couperont la surface S suivant une suite de courbes M, M', M"..., et la surface s suivant une suite d'autres courbes $m, m', m''\ldots$ Les sections M et m, M' et m', M" et m'', etc., étant deux à deux sur une même surface auxiliaire, se rencontreront en général suivant des points $a, b, c\ldots$, situés sur la surface Σ; $a', b', c'\ldots$, situés sur la surface Σ'; $a'', b'', c''\ldots$, situés sur la surface Σ''; etc. Et comme ces points seront communs aux deux surfaces S et s, il ne s'agira que de les joindre convenablement par des lignes pour obtenir toutes les branches $aa'a''\ldots, bb'b''\ldots, cc'c''\ldots$, etc., de l'intersection cherchée.

492. Il est clair que pour mener ces lignes, il faudra soigneusement classer les points obtenus $a, b, c\ldots, a', b', c'\ldots, a'', b'', c''\ldots$, etc., selon les lois d'analogie qui les lieront les uns aux autres. Sans cela, on serait exposé à joindre entre eux des points de branches différentes de l'intersection demandée, et les arcs de courbe qui en opéreraient la jonction n'appartiendraient pas à cette intersection.

Le classement des points obtenus présente quelquefois de la difficulté; mais, lorsque les sections auxiliaires sont proches les unes des autres, chaque couple de sections correspondantes, M et m, M′ et m', M″ et m'', etc.. diffère peu de la couple suivante et de la couple précédente, ce qui rend l'analogie des points obtenus facile à reconnaître.

493. Souvent deux branches se réunissent, et les surfaces auxiliaires qui sont d'un côté du point de réunion ne contiennent pas de points de ces branches, tandis que les surfaces auxiliaires qui sont de l'autre côté donnent un point de chacune d'elles. Dans ce cas, il faut de l'habitude, ou de la sagacité, pour ne pas s'embrouiller dans les résultats obtenus, bien que le rapprochement successif des points des deux branches indique d'ordinaire leur réunion.

494. Le choix des surfaces auxiliaires, pour que les constructions soient les plus simples possibles, est un objet bien important. Et comme il peut y avoir des positions particulières de ces surfaces qui donnent des points singuliers de l'intersection, on doit mettre beaucoup de soin à employer ces positions de préférence à d'autres.

La construction des intersections de surfaces est certainement une des parties les plus difficiles de la Géométrie descriptive. Nous pensons qu'au moyen de la solution générale qu'on vient de voir, et des problèmes qui précèdent, dans lesquels nous avons tâché d'éclaircir toutes les difficultés, on pourra déterminer ces intersections dans tous les cas possibles.

CHAPITRE III.

Des tangentes aux intersections de surfaces.

495. Nous avons vu précédemment (152) que la tangente en un point de l'intersection de deux surfaces est l'intersection de deux plans tangens à ces surfaces en ce point : il résulte de là un premier procédé pour construire les tangentes aux intersections de surfaces.

496. On peut remarquer aussi que la tangente est perpendiculaire aux normales des deux surfaces, et conséquemment au plan que ces normales déterminent, ce qui fournit un second procédé, qui n'est à la rigueur qu'une modification du premier, mais qui doit être préféré lorsque les plans tangens se déduisent des normales, parce qu'il évite la construction de ces plans, et qu'alors il est plus simple. Nous le nommerons *le procédé du plan normal*. On l'appliquera plus loin (518–521) à des exemples pour lesquels il présente des avantages particuliers.

497. Lorsqu'une des deux surfaces données est développable, l'intersec-

tion, sur le développement de cette surface, est une courbe particulière, que nous avons nommée (426) *transformée de l'intersection*, et à laquelle on va voir que l'on sait aussi mener des tangentes.

Soit k un point de cette intersection, e l'élément indéfini de la surface développable sur lequel est le point k, et m l'arc infiniment petit de l'intersection auquel appartient le même point k. L'élément e et l'arc m détermineront une zône infiniment étroite de la surface développable; et si l'on conçoit qu'on développe cette surface, il est évident que cette petite zône se trouvera, sur le développement, absolument telle qu'elle était sur la surface: donc l'angle de l'arc m et de l'élément e ne changera pas quand on fera ce développement. Mais l'arc m est dirigé, sur la surface développable, suivant la tangente à l'intersection, et sur le développement, suivant la tangente à la transformée; donc les angles de ces tangentes et des élémens indéfinis qui leur correspondent sont égaux.

Il suit de là que si l'on sait mener une tangente à l'intersection, il ne s'agira que de construire l'angle de cette tangente avec l'élément de la surface développable sur lequel sera le point de contact, et de rapporter cet angle sur le développement, pour construire la tangente à la transformée.

498. Les moyens de mener des tangentes à l'intersection de deux surfaces, et à la transformée qui résulte de cette intersection, si l'une de ces surfaces est développable, s'appliquent, quel que soit l'angle sous lequel se coupent les surfaces, pourvu que cet angle ne soit pas nul.

Mais lorsqu'il est nul, le plan tangent à l'une de ces surfaces se confond avec le plan tangent à l'autre; ces deux plans n'ont pas, par conséquent, d'intersection commune, ou plutôt, ils ont à la fois pour intersection toutes les droites qui se croisent par le point de contact sur la surface de l'un d'eux, et la tangente demandée, qui est une de ces droites, reste indéterminée. Et comme les normales aux deux surfaces se trouvent confondues quand les plans tangens se confondent, le procédé du n° 496 ne donne rien de plus que celui du n° 495.

499. Il résulte de là que lorsque deux surfaces se touchent suivant une ligne, ce qui est la même chose que si elles se coupaient suivant les points de cette ligne sous un angle zéro, on ne sait pas mener de tangentes à cette même ligne par le moyen des plans tangens à ces surfaces.

Ces lignes portent, comme on sait, le nom de *courbes de contact*; elles forment dans la Géométrie descriptive une grande classe de courbes, aux-

quelles on ne sait mener des tangentes que par le moyen qu'on verra n° 766.

500. Lorsqu'une branche de courbe est infinie, comme on en a vu précédemment des exemples (437 et 480), la tangente qui a son point de contact à l'infini est ce qu'on appelle une *asymptote* (877).

Parmi les courbes que nous connaissons le mieux, l'hyperbole et la parabole nous présentent, par rapport aux asymptotes, ce qu'offrent les lignes courbes en général. Pour les unes, la tangente tout entière passe à l'infini quand le point de contact s'éloigne à l'infini : telle est la parabole (883) : telle est aussi l'hélice. Ces courbes, et toutes celles qui sont dans le même cas, ne présentent pas d'asymptotes. Pour les autres, l'éloignement du point de contact à l'infini n'entraine pas tous les points de la tangente aussi à l'infini; cette tangente prend alors une situation particulière, et, dans cette situation, elle est l'asymptote de la courbe : c'est ce qui a lieu pour l'hyperbole (876 et 877).

501. Dans tous les cas, la tangente à une ligne d'intersection étant l'intersection des deux plans tangens correspondans, il arrivera, lorsque le point de contact passera à l'infini, que les plans tangens seront à l'infini, ou seront parallèles, si la courbe n'a pas d'asymptote, ou qu'ils se couperont, si elle en a une. D'où l'on voit que la question de mener des asymptotes aux intersectionsde surfaces se trouve ramenée à la recherche des plans tangens qui touchent les surfaces données à l'infini.

Les problèmes suivans acheveront d'éclaircir ce qui précède.

Pl. 35. 502. PROBLÈME 1er. *Par un point donné* (F, F'), *de l'intersection* (ADGK, A'G') *d'un cylindre vertical* ABCD..., *et d'un plan* A'G', *mener une tangente à cette intersection.*

Menons par le point F la droite Fq, tangente à la base ABCD.... du cylindre ; la tangente demandée sera dans le plan vertical Fq : mais elle sera aussi dans le plan A'G' de l'intersection; donc cette tangente sera la droite (Fq, F'Q).

503. Il sera facile de la rapporter sur le rabattement A'$\beta\gamma\delta$....; car il estclair que lorsqu'on fait tourner le plan A'Q, autour de la droite (MN, A'Q), le point (n, n') de la tangente (Fq, F'Q), situé sur la charnière, ne prend aucun mouvement : donc il est lui-même son rabattement. Or le point (F, F') se rabattant en φ, la tangente (Fq, F'Q) se rabattra en $n'\varphi$.

504. PROBLÈME 2. *Étant donnée, sur le développement* $a'a'yx$ *du cylindre* ABCD......', *la transformée* A"B"C"..... *de l'intersection*

(ABCD..., A'G'), *mener par le point* F'' *une tangente à cette transformée.* Pl. 34.

On connaîtra, sur l'intersection (ABCD..., A'G'), le point (F, F') qui dans le développement devient F; on menera, par le procédé du problème précédent, la tangente (Fq, F'Q), et comme l'angle de cette tangente et de l'élément (F, fF') ne varie pas quand on développe le cylindre (497), il ne s'agira que de construire, sur le développement, le triangle rectangle que forment les points (F, F'), (F, f), (q, Q), et l'on obtiendra la tangente demandée. Or, on a déjà fF'' = fF', l'angle F''$f\alpha'$ est droit, donc si l'on prend fq = Fq, et que l'on mène qF'', le triangle fqF' sera le triangle cherché, et la droite qF'' la tangente demandée.

505. PROBLÈME 3. *Étant donnés le cône* {(A, A'), (BCDE, R'Q')}, *le plan* (FL, FD'), *et les deux branches* (BMC, FM'), (DGE, D'G'), *de leur intersection, on demande les asymptotes de cette intersection.* Pl. 35.

Il s'agira de trouver les plans tangens au cône à l'infini (501), et pour cela il faudra chercher d'abord les élémens sur lesquels se trouvent les points des branches (BMC, FM'), (DGE, D'G'), situés à l'infini. Pour obtenir ces élémens, menons par le centre (A, A') de la surface conique donnée un plan ($\alpha\beta\delta$, αA'), parallèle au plan coupant (FL, FD'); ce plan coupera le cône suivant deux élémens (βA, αA'), (δA, αA'), parallèles au plan (FL, FD'), lesquels, par conséquent, ne pourront rencontrer ce dernier plan que suivant quatre points situés à l'infini : (βA, αA'), (δA, αA'), seront donc les élémens cherchés.

506. Si l'on veut savoir comment les points situés à l'infini se lient aux deux branches de l'intersection, on imaginera que l'élément (RA, R'A') se meuve pour engendrer le cône. Dans sa position initiale, il percera le plan coupant en (M, M'); lorsque le point R sera en H', le point d'intersection sera en (I', I); il viendra ensuite en (B, F); puis à mesure que le point R approchera du point δ, le point d'intersection s'éloignera, sur la nappe inférieure du cône, des points (M, M'), (I', I), (B, F). Enfin ce point d'intersection sera à l'infini, au-dessous du plan horizontal, quand le point R coïncidera avec le point δ; car alors la génératrice occupera la position (δA, αA') parallèle au plan coupant. A partir de cette position, la droite mobile donnera des points de la branche supérieure de l'intersection; et d'abord l'élément (δA, αA') devant percer le plan coupant, aussi bien par son extrémité inférieure que pour son extrémité supérieure, cet élément don-

Pl. 35. nera un point de la branche (P″D, PD′), situé à l'infini au-dessus du plan horizontal. Ensuite, à mesure que le point R avancera vers le point Q, le point d'intersection s'abaissera, en parcourant la branche (DP″G, D′G′), et quand le point R sera en Q, le point d'intersection sera en (G, G′). En continuant de faire mouvoir le point R sur le demi-cercle QDCR, les circonstances qu'on vient d'examiner se reproduiront dans un ordre contraire.

507. Maintenant nous remarquerons que la tangente en un point (I′, I), de l'intersection donnée, est la droite suivant laquelle le plan tangent au cône suivant (I′, I), ou, ce qui revient au même, tout le long de l'élément (AH′, A′A), coupe le plan (LF, FD′). D'après cela, l'asymptote à la branche (I′B, IF) sera l'intersection du plan coupant et du plan tangent au cône suivant l'élément (Aδ, A′α).

508. Pour construire cette intersection, nous remarquerons qu'elle est nécessairement parallèle à la droite (Aδ, A′α); nous menerons par le point δ la droite $\delta\varepsilon$, tangente au cercle BCDE; cette droite sera la trace horizontale du plan tangent au cône suivant l'élément (Aδ, A′α), elle coupera la trace horizontale FL, du plan coupant, en un point ζ qui appartiendra à l'asymptote parallèle à (Aδ, A′α) : donc en menant par ce point la droite ($\zeta\theta$, FD′), cette droite sera l'asymptote cherchée.

Si l'on voulait mener l'asymptote de la branche (P″D, PD′), on serait conduit au même résultat par les mêmes constructions : donc la droite ($\zeta\theta$, FD′) est l'asymptote de deux branches de l'intersection donnée.

En menant un plan tangent au cône suivant l'élément (βA, αA′), il aura pour trace horizontale la droite $\beta\varepsilon$, tangente en β au cercle BCDE, et il coupera le plan (FL, FD′) suivant l'asymptote ($\pi\varphi$, FD′), des deux autres branches (I″C, IF), (P′E, PD′), de l'intersection. D'où l'on voit que les parties (BMC, M′F), (DGE, G′D′), de cette intersection, qui est une hyperbole (583), sont conjuguées entre elles au moyen de leurs asymptotes ($\zeta\theta$, FD′), ($\pi\varphi$, FD′).

509. Si l'on veut avoir ces asymptotes sur le rabattement de l'intersection, il ne s'agira que de construire deux points de chacune d'elles sur ce rabattement. Or, il est clair que si l'on prend $F\pi' = F\pi$, et $F\zeta' = F\zeta$, les points π' et ζ' seront les rabattemens de π et ζ; en cherchant donc, par le même moyen, les rabattemens de deux autres points tels que θ et φ, on pourra mener les asymptotes $\pi'\varphi'$, $\zeta'\theta'$, du rabattement de l'intersection.

510. Si le plan coupant ne rencontrait qu'une des deux nappes du cône, l'intersection n'aurait pas d'asymptotes, quoiqu'elle pût avoir des points à l'infini. En effet, prenons pour plan coupant le plan $\omega\psi$, perpendiculaire au plan vertical et parallèle à l'élément (RQ, R'U); il est clair qu'il ne pourra rencontrer que la nappe inférieure du cône. Or, chaque élément percera ce plan en un point, et la suite de ces points formera une courbe qui, à partir du point λ, s'étendra jusqu'au point où l'élément A'R' et le plan $\omega\psi$ se rencontreront, c'est-à-dire jusqu'à l'infini. Mais la tangente à l'infini, ou, ce qui revient au même, l'asymptote, sera l'intersection du plan R'A, tangent au cône et perpendiculaire au plan vertical, avec le plan $\omega\psi$; et comme ces plans sont parallèles, ils ne se coupent qu'à l'infini : donc l'intersection dont il s'agit, qui est une parabole (586), n'a pas d'asymptotes (500). Pl. 35.

511. Nous ferons remarquer que les droites ($\zeta\theta$, FD'), ($\pi\varphi$, FD'), ont leurs projections horizontales ponctuées dans l'intérieur du cercle BCDE. La raison en est que ces droites sont situées au-dessous de la nappe supérieure du cône, et qu'elles ne sont vues, en projection horizontale, qu'au dehors de la projection de cette nappe.

512. *Problème* 4. *On demande sur le développement du cône* {(A, A'), (BCDE, R'Q')}, *les asymptotes de la transformée ...cmb..., ...dp''g' ...gp'e...* Pl. 35 et Pl. 36. Fig. 1.

Imaginons que le développement du cône soit fait sur le plan tangent correspondant à l'élément (δA, αA'), plan dont la trace est $\delta\iota$, et qui contient l'asymptote ($\zeta\theta$, FD'). Il est clair que dans l'opération du développement, la petite zône commune à ce plan et au cône n'éprouvera aucun changement : et comme cette zône contient les extrémités des branches de l'intersection suivant lesquelles cette intersection est touchée par l'asymptote ($\zeta\theta$, FD'); il s'ensuit que cette asymptote, en conservant sa position par rapport à l'élément (δA, αA'), sera l'asymptote de la transformée. Mais le développement est toujours le même, quel que soit le plan tangent sur lequel on le suppose fait : donc les asymptotes de la transformée sont des droites parallèles à ce que deviennent les élémens (δA, αA'), (βA, αA'), lorsqu'on développe le cône. De plus, ces droites sont éloignées de leurs parallèles des distances $\delta\zeta$, $\beta\pi$, qui séparent les asymptotes ($\zeta\theta$, FD'), ($\pi\varphi$, FD'), des élémens (δA, αA'), (βA, αA').

Pl. 35 et Pl. 36. Fig. 1. Il suit de là que si l'on porte les arcs $R\delta$, $R\mathcal{C}$, de r en δ', et de r en $\mathcal{C}'$, sur le developpement, pour avoir les élémens $\delta'a$, $\mathcal{C}'a$, qui ne sont autre chose que les positions qu'occupent (δA, αA'), ($\mathcal{C}$A, αA'), sur ce développement, et qu'ensuite on prenne sur les droites $\delta'\zeta''$, $\mathcal{C}'\pi''$, tangentes au cercle $q'\mathcal{C}'r\delta'q$, les grandeurs $\delta'\zeta''=\delta\zeta$, $\mathcal{C}'\pi''=\mathcal{C}\pi$; puis, que l'on mène, par les points obtenus ζ'' et π'', les droites $\zeta''\theta''$, $\pi''\varphi''$, respectivement parallèles aux élémens $\delta'a$, $\mathcal{C}'a$, ces droites seront les asymptotes demandées.

513. Si le développement du cône était complet, c'est-à-dire si les circonvolutions infinies du cercle BCDE étaient toutes rapportées sur le cercle *rqs'usq'*, la transformée aurait une infinité de branches, conjuguées entre elles deux à deux, au moyen d'une infinité de droites, dont chacune serait l'asymptote de deux branches.

514. **Problème** 5. *Étant donnée l'intersection d'un plan et d'une surface de révolution, mener, par un point de cette intersection, une droite qui lui soit tangente.*

Par le point de contact donné, on menera un plan tangent à la surface de révolution, il coupera le plan donné suivant une droite, et cette droite sera la tangente demandée.

Nous laisserons au lecteur le soin d'appliquer cette solution à l'épure de la planche 37.

Pl. 38. 515. **Problème** 6. *Etant donnés deux cylindres, et un point* (T, *t*) *de leur intersection, on demande la tangente en ce point, à cette intersection.*

Par les élémens (OT, *ot*), (GT, *gt*), dont l'intersection est le point (T, *t*), on menera des plans respectivement tangens aux deux cylindres auxquels ces élémens appartiennent; ils auront pour traces horizontales des droites Oθ, Gθ, tangentes aux bases ABCD, EFGH; ces traces se couperont en un point θ du plan horizontal, et la droite menée par ce point, et par le point (T, *t*), sera la tangente demandée.

Nous avons mené la projection horizontale θT de cette tangente. Si l'on veut avoir sa projection verticale, il ne s'agira que d'abaisser par le point θ une perpendiculaire sur la ligne de terre, et de mener par le pied de cette perpendiculaire, et par le point *t*, une droite, qui sera la projection cherchée.

516. *Problème 7. Étant donnée l'intersection de deux cônes, obtenue pl. 40, on demande les asymptotes des diverses branches de cette intersection.*

Nous avons trouvé (480) les élémens parallèles des deux cônes en question; ces élémens se rencontrent à l'infini suivant des points de l'intersection donnée; ainsi, il ne s'agit que de mener des plans tangens aux cônes donnés suivant ces élémens, et les intersections de ces plans seront les asymptotes demandées (501).

Or, les élémens parallèles sont ceux dont les projections horizontales sont Kf'' et Ra Pl. 40.
d'une part, et d'autre part LP et SQ; donc si l'on mène, par les points f'' et a, les droites $f''\theta$, θa, respectivement tangentes aux bases des deux cônes, ces droites, qui seront les traces horizontales des plans tangens aux cônes suivant leurs élémens parallèles, se couperont en un point θ de l'une des asymptotes. Et comme cette asymptote est nécessairement parallèle à la droite $(Kf'', K'f'')$, il ne s'agira que de mener par le point θ une parallèle à la ligne $(Kf'', K'f'')$, et cette parallèle, dont la projection horizontale sera $\theta\pi$, sera, par une extrémité, l'asymptote de la branche *pux*, et par l'autre extrémité, l'asymptote de la branche $qJ'y$.

Il serait facile de construire la projection verticale de cette première asymptote, mais nous ne la construisons pas, afin de ne pas embrouiller la figure. Quant à la seconde, dont la projection horizontale est $\omega\varphi$, elle sera symétrique de la première par rapport au plan mX, et elle s'obtiendrait d'ailleurs par des opérations pareilles à celles que l'on vient d'exposer.

517. *Problème 8. Étant donné un point (s, s') de l'intersection de deux surfaces de* Pl. 41.
révolution, obtenue pl. 41, on demande la tangente en ce point à cette intersection.

D'après le procédé du n° 495, cette tangente sera l'intersection des deux plans tangens en (s, s') aux deux surfaces de révolution; donc elle percera le plan horizontal de projection au point où se couperont les traces de ces deux plans. Donc si l'on construit ces traces, et qu'on mène par leur point de rencontre et par le point (s, s') une droite, cette droite sera la tangente demandée. On voit par là qu'il sera aisé de la construire.

Ramenons le plan méridien As de l'hyperboloïde en AC; le point (s, s') viendra en (C, C'), et la tangente à la méridienne As se trouvera la droite $(C\alpha, C'\alpha')$, tangente en (C, C') à l'hyperbole B'C'DE. Cette tangente percera le plan horizontal en (α, α'), et lorsqu'on ramenera le plan AC en As, le point (α, α') viendra en ς; d'où nous conclurons que la tangente en (s, s'), à la méridienne As, perce le plan horizontal en ς. Or, cette tangente est dans le plan tangent en (s, s') à l'hyperboloïde; donc la trace de ce plan passe par le point ς. Mais on sait, d'après ce qu'on a vu précédemment (294), que cette trace est perpendiculaire au méridien As; donc enfin, cette même trace est la droite $\varsigma\theta$, perpendiculaire au point ς sur la droite $A\varsigma$.

Cherchons maintenant la trace horizontale du plan tangent au paraboloïde en (s, s'). Pour cela, concevons qu'on fasse tourner le plan méridien qui correspond au point (s, s'), autour de l'axe $(GF, G'F')$, jusqu'à ce que ce méridien soit devenu vertical; le point (s, s') décrira dans le mouvement un cercle IQ; ce point viendra s'abattre en I; la tangente correspondante au point (s, s') se trouvera coïncider avec la droite $I\delta$, et il est clair que si l'on construit le point où cette tangente $(GF, I\delta)$ rencontre l'axe $(GF, G'F')$, et que

Pl. 41. l'on mène par ce point et par le point $(\varepsilon, \varepsilon')$ une droite $(GF, \varepsilon'\lambda)$, cette droite sera la tangente en $(\varepsilon, \varepsilon')$ à la méridienne qui passe par le point $(\varepsilon, \varepsilon')$.

Menons par le point J la droite $I\iota'$, perpendiculaire à $I\varepsilon'$; cette droite rencontrera l'axe $(GF, G'F')$ au point (ι, ι'), et ce point sera évidemment celui où concourront toutes les normales du paraboloïde correspondantes au cercle IQ : donc si l'on mène par le point ε et par le point ι la droite $\varepsilon\iota$, cette droite sera la projection horizontale de la normale en $(\varepsilon, \varepsilon')$ à la surface du paraboloïde.

Or, le plan tangent à cette surface en $(\varepsilon, \varepsilon')$ passera par la tangente $(GF, \varepsilon'\lambda)$, et sera perpendiculaire à la normale $(\varepsilon\iota, \varepsilon'\iota')$; donc si l'on construit le point où la droite $(GF, \varepsilon'\lambda)$ perce le plan horizontal, et que l'on mène par ce point la droite $\omega\theta$ perpendiculaire à $\varepsilon\iota$, cette droite $\omega\theta$ sera la trace horizontale du plan tangent au paraboloïde.

Ayant les traces $G\theta$, $\omega\theta$, on construira la projection θ' du point (θ, θ'), où elles se coupent, et la droite $(\theta\varepsilon, \theta'\varepsilon')$, qui passera par ce point et par le point $(\varepsilon, \varepsilon')$, sera la tangente demandée.

518. Le procédé du plan normal (496), dû à M. J. Binet (*), sera d'un emploi beaucoup plus avantageux.

D'après ce procédé, il s'agira de mener par le point $(\varepsilon, \varepsilon')$ deux droites respectivement normales aux surfaces données; on construira le plan qu'elles détermineront, et en menant par le point donné $(\varepsilon, \varepsilon')$ une droite perpendiculaire à ce plan, cette droite sera la tangente demandée.

Pour opérer le plus simplement possible, on prendra le plan GF, des axes de révolution, pour plan vertical de projection. La normale $(\varepsilon A, \varepsilon' i)$ à l'hyperboloïde s'appuiera sur un point (A, i) de l'axe $(A, A'A'')$, et elle percera le plan horizontal en (m, m'). La normale $(\iota\varepsilon, \iota'\varepsilon')$ au paraboloïde s'appuiera sur le point (ι, ι') de l'axe $(GF, G'F')$, et elle percera le plan horizontal en k. Les points (A, i), (ι, ι'), étant très faciles à déterminer, et les normales $(\varepsilon A, \varepsilon' i)$, $(\iota\varepsilon, \iota'\varepsilon')$, s'ensuivant, les traces knm, $\iota' in'$, du plan qu'elles détermineront, se construiront fort aisément, et les droites $\theta\varepsilon$, $\theta'\varepsilon'$, menées par les points ε, ε', perpendiculairement aux traces respectives knm, $\iota' in'$, seront les projections de la tangente demandée $(\theta'\varepsilon, \theta\varepsilon')$.

On remarquera surtout que dès que l'on a construit les deux points ι et i, où les normales s'appuient sur les axes de révolution, la projection verticale $\varepsilon'\theta'$, perpendiculaire à $\iota' i$, se trouve déterminée.

519. Si l'on voulait connaître les tangentes aux courbes $r't'v'$, $y'za'$, suivant les points singuliers r', v', y' et a', analogues à ceux que nous avons examinés n° 483, il serait tout naturel d'appliquer aux points (r, r'), (v, v'), (y, y'), (a, a'), le premier des deux procédés que nous venons d'exposer, et l'on trouverait que les tangentes en ces derniers points sont des perpendiculaires au plan vertical. D'où il faut conclure que les tangentes en r', v', y', a', aux courbes $r't'v'$, $y'za'$, sont les points r', v', y' a', eux-mêmes : c'est-à-dire que ces courbes, comme projections de l'intersection donnée, n'ont pas de tangentes aux points r', v', y' et a', où elles s'arrêtent.

(*) *Voyez* la Correspondance sur l'École polytechnique, tom. III, pag. 199.

520. Mais on remarquera que les courbes $r't'v'$, $y'za'$, considérées indépendamment de la fonction, qu'elles remplissent sur l'épure, d'être les projections de l'intersection d'un hyperboloïde à une nappe et d'un paraboloïde elliptique, ne s'arrêtent pas en r', v', y' et a'. En effet, les droites KM et DN, que détermine le cercle DC'KM, donnent un point W de la branche za' prolongée; et les points de la même branche, situés entre a' et W, sont donnés par d'autres cercles plus petits que DC'KM. Le cercle bLcd, tangent au sommet L de la parabole HIKLMQN', et les cercles compris entre DC'KM et bLcd, déterminent des cercles analogues à C'P et à KM, qui donnent des points de la branche $t'u'v'$, jusques et au-delà du point v'. Enfin, tous les cercles possibles, plus grands que DC'KM, déterminent des droites analogues à C'P, DN et IQ, qui donnent jusqu'à l'infini des points des branches $t's'r'$, zy' (*). Pl. 41.

521. Or, puisque les courbes $r't'v'$, $y'za'$, se prolongent au-delà des points r', v', y' et a', elles ont nécessairement des tangentes en ces points.

Imaginons que le point (s, s') se meuve sur l'intersection donnée : à chacune de ses positions il correspondra une position du point s', une position du point i, et une position de la droite $s'i$, qui passe par ces points. Lorsque le point mobile aura dépassé le point (r, r'), il se trouvera sur la branche $(rxu, r's't')$; il occupera successivement sur la projection verticale $r's't'$, toutes les positions qu'il y aura déjà occupées, et la droite $s'i$ reprendra aussi ses premières positions. Cela posé, considérons ce point dans la position (r, r') : la droite correspondante $s'i$ étant la trace du plan normal sur le plan GF, et ces deux plans se trouvant confondus pour cette position, il semblerait qu'on dût en conclure que, pour le point (r, r'), la droite $s'i$ n'existe pas : mais, en y réfléchissant, on en conclura seulement que sous le rapport de la coïncidence du plan normal et du plan GF elle est indéterminée.

Et par un examen plus approfondi, on verra qu'il y a des conditions particulières qui la déterminent. Effectivement, il est clair qu'elle est la limite des positions que prend $s'i$, lorsque le point (s, s') se meut sur $(srxu, r's't')$, et qu'elle passe, par conséquent, par les points où les normales correspondantes au point r' s'appuient sur les axes de révolution; car ces normales sont aussi les limites de celles qui correspondent aux diverses positions

(*) Les circonstances qu'on vient d'examiner tiennent à cè que la construction qui donne les points des lignes $r't'v'$, $y'za'$, est plus générale que la définition de ces lignes comme projections de la ligne d'intersection. Il peut arriver encore que la loi qui lie les points de ces lignes soit plus générale que celle qui résulte de la construction de leurs points, et dans ce cas, à plus forte raison, ces mêmes lignes, au lieu de s'arrêter aux points donnés par le cercle bLcd, se prolongeront au-delà. C'est ce qui a lieu effectivement pour la figure en question ; car l'analyse fait voir que les deux branches de courbe $r't'v'$, $y'za'$, appartiennent à une même hyperbole. Ceci va s'éclaircir au moyen d'un exemple fort simple.

Supposons que les surfaces données soient deux sphères égales, leur intersection sera un cercle dont le plan sera perpendiculaire sur le milieu de la droite qui joindra leurs centres, et ce cercle aura une portion de ligne droite pour projection sur un plan quelconque mené par ces centres. Or, on pourrait construire la portion de ligne droite dont il s'agit par cette propriété des points de l'intersection, qu'ils sont, en projection, les intersections de deux cercles égaux dont on fait varier le rayon, ce qui donnerait la droite indéfinie, tout entière, dont une partie seulement est la projection du cercle. On voit par là que si les deux sphères données ne se coupaient pas, la construction générale n'en donnerait pas moins la projection de leur intersection.

La matière de cette note est tirée du *Traité des propriétés projectives* de M. Poncelet, sect. Ire, ch. II.

Pl. 41. du point mobile (s, s'). Donc on obtiendra la tangente en r', et conséquemment en v', y', et a', par la règle du n° 518.

Toutes les fois que les deux surfaces données sont deux surfaces de révolution, cette règle donne les tangentes aux points tels que r', v', y', et a', où se termine leur intersection, sur le plan de projection parallèle à leurs axes.

On pourrait demander aussi les tangentes aux arcs des courbes $r't'v'$, $y'za'$, qui, ainsi que $r'p$ et a'W, se trouvent au-delà des points r', v', y' et a'; mais le moyen que fournit la ligne variable ii ne s'applique pas à ces arcs, parce qu'il n'y a pas, pour leurs points, de normales analogues à $s'i'$ et $s'i$. Les dernières de ces normales sont celles qui répondent au point r'.

522. PROBLÈME GÉNÉRAL. *Étant donnée l'intersection de deux surfaces, et supposé que cette intersection ait une branche indéfinie qui ait une asymptote, trouver, 1°. cette asymptote; 2°. si l'une des deux surfaces est développable, trouver sur son développement, l'asymptote de la transformée de la branche indéfinie.*

Pour résoudre la première question, on cherchera d'abord les génératrices des deux surfaces données qui se rencontrent à l'infini; on menera ensuite les plans tangens qui touchent ces surfaces à l'infini, et l'intersection de ces plans tangens sera l'asymptote demandée (501).

523. Pour résoudre la seconde question, imaginons que le développement soit fait sur le plan tangent qui contient l'asymptote; il est clair (497) que rien de ce qui sera contenu dans ce plan ne changera en faisant ce développement: donc la position de cette asymptote, par rapport à l'élément qui contient le point de contact situé à l'infini, sera sur le développement la même que dans l'espace.

Il suit de là que pour avoir l'asymptote demandée, il ne s'agira que de construire une droite qui ait, par rapport à l'élément qui sur le développement passe par l'extrémité de la branche donnée, la position connue que l'asymptote présentait avant le développement par rapport au même élément.

CHAPITRE IV.

Des Sections coniques.

524. On appelle *sections coniques* les lignes d'intersection des plans et des cônes à bases circulaires.

Avant d'étudier les propriétés de ces lignes, nous allons tâcher de donner des idées générales de leurs formes.

Pl. 36. Fig. 2. 525. Soit ASB la projection d'un cône quelconque à base circulaire,

et soit G la projection d'une droite que nous supposerons menée au travers du cône. Concevons par cette droite un plan; imaginons qu'il tourne autour de la droite G, et voyons quelles sections il donnera dans ses diverses positions. Pl. 36. Fig. 2.

Par le point G, menons les droites GP, GP′, respectivement parallèles aux contours SA, SB, de la projection du cône. Il est clair que dans toutes les positions pq, $p'q'$, $p''q''$, du plan coupant, comprises dans l'angle Q′GP, il rencontrera tous les élémens d'une même nappe, et qu'il donnera des sections fermées. Il est clair également que dans toutes les positions mn, $m'n'$, $m''n''$, comprises dans l'angle PGP′, il coupera les deux nappes, mais sans rencontrer tous les élémens, et qu'il donnera des sections à deux branches, situées, l'une sur la nappe inférieure, et l'autre sur la nappe supérieure.

Quant aux sections PQ, P′Q′, qui sépareront les sections fermées des sections à deux branches, il est évident que ce seront des sections ouvertes à une seule branche infinie. Le caractère de ces sections PQ, P′Q′, est que leurs plans sont parallèles à des plans tangens SA, SB, du cône; et l'on voit qu'elles sont tout-à-la-fois, ou des courbes fermées, comme $p''q''$, infiniment alongées à l'opposé du point q'', ou des courbes à deux branches, comme mn, dont la branche n serait passée à l'infini.

Si le plan coupant mn, d'une section à deux branches, s'approche du sommet S, l'intervalle compris entre ces branches diminuera de plus en plus; et si le plan mn contient ce sommet, les deux branches se trouveront réunies, et formées par le système de deux droites.

526. Si le point G vient peu à peu en g, la section PG, ouverte à l'opposé du point g', se resserrera de plus en plus contre elle-même, et lorsque le point G sera en g, cette section aura la position AA′; elle se trouvera donc formée par une seule ligne droite. Cette ligne sera tout-à-la-fois, 1°. une section à deux branches, infiniment étroite; 2°. le système de deux sections ouvertes, comme GP, hR, dont la réunion aura été opérée par le rapprochement des points g' et h, et qui, l'une et l'autre, seront aussi infiniment étroites. Si le point G, au lieu de suivre la ligne Gg, parallèle à BS, suit une autre ligne GA, de façon qu'en s'approchant du plan AS il s'éloigne du plan BS, la section P′Q′, ouverte à l'opposé du point g, s'ouvrira de plus en plus; et si le point G vient sur SA, à une distance infinie au-dessous du point A, la section, en continuant toujours de s'ouvrir, se changera encore en une droite. Ainsi, soit que

Pl. 36. Fig. 2. la section non fermée à une branche se resserre ou s'ouvre, elle tend toujours vers une droite, seulement, il faut remarquer que dans le premier cas la droite est tangente à la courbe, tandis qu'elle la coupe dans le second.

Si le plan coupant est un plan *rs*, passant par le sommet S, la section sera une courbe fermée contractée en un seul point.

527. Si l'on imagine que le point S s'éloigne à une distance infinie de la base circulaire du cône, ce cône se changera en un cylindre, et le plan coupant donnera en général une section fermée, qui, comme cas particulier, appartiendra au genre de courbes nommées *sections coniques*. Si le plan coupant devient parallèle aux élémens du cylindre, cette section se changera en deux droites parallèles plus ou moins écartées, qui se réuniront en une seule dans le cas où la droite G, au lieu de traverser la surface, ne ferait que la toucher.

528. Il suffit de ce qui précède pour montrer que les sections coniques ont la plus grande analogie avec les courbes qu'on nomme *ellipses*, *hyperboles* et *paraboles* (855 — 888). On verra plus loin (581 — 586) que cette analogie est une identité : mais avant de le démontrer, il est nécessaire d'étudier les principales propriétés des sections coniques. Nous les considérerons comme formées de trois espèces, 1°. les sections fermées ; 2°. les sections à deux branches ; 3°. les sections ouvertes à une seule branche. Quant aux cas singuliers examinés tout-à-l'heure, ils rentrent dans ces trois espèces.

529. DES SECTIONS CIRCULAIRES DU CONE. Imaginons dans l'espace un cône à base circulaire ; concevons par le centre de cette base deux droites, l'une perpendiculaire à son plan, l'autre menée au sommet, et par ces deux droites faisons passer un plan : il divisera le cône en deux parties symétriques ; nous le nommerons *plan principal* (*) du cône, et il sera celui de la projection que nous allons tracer.

Fig. 4. 530. Soit SA, SB, les élémens suivant lesquels ce plan coupera la surface conique, et soit AB le diamètre suivant lequel le même plan coupera la base circulaire. Le plan de cette base et le plan ASB étant perpendi-

(*) On verra dans la suite (593) qu'il y a d'autres plans du cône qu'on nomme *plans principaux ;* mais comme on les désigne d'ordinaire collectivement, la dénomination de plan principal, appliquée à un seul plan, n'offrira aucune équivoque.

culaires entre eux, la base dont il s'agit se projettera sur le plan de la figure suivant la droite AB, et l'on sait (898) que tous les plans parallèles au plan AB couperont le cône suivant des cercles. Pl. 36. Fig. 4.

Cela posé, considérons le plan principal ASB comme horizontal; portons SA en Sa, SB en Sb, et menons ab. Il est clair que l'intersection du cône et du plan vertical ab sera une courbe fermée dont les tangentes en a et b seront verticales, comme celles en A et B de la section AB; que la droite ab, qui joint les points de contact a et b, sera égale à la droite AB, qui joint les points de contact A et B, et que les deux sections ab, AB, se couperont dans la verticale m, telle que $bm = Bm$, en sorte que pour des abscisses égales bm, BM, elles auront, dans cette verticale, des ordonnées égales.

Cette analogie entre ces deux courbes AB, ab, conduit à penser que la dernière est un cercle comme la première : cela est effectivement. Pour le prouver, menons entre les deux points a et b un plan quelconque A'B', parallèle à AB; il coupera le cône suivant un cercle (898), et l'ordonnée en P, que nous nommerons π, sera commune au cercle et à la courbe ab. Or, cette ordonnée étant moyenne proportionnelle entre les deux segmens correspondans A'P, PB', on aura :

$$\pi^2 = A'P \times PB';$$

mais les triangles semblables A'Pb, B'Pa, donnent

$$A'P : aP :: Pb : PB',$$

ou

$$A'P \times PB' = aP \times Pb;$$

donc on a

$$\pi^2 = aP \times Pb.$$

Ce qui montre que l'ordonnée en P est aussi moyenne proportionnelle entre les deux segmens aP, Pb, quelle que soit la position du point P entre a et b : donc la section ab est un cercle égal à AB.

531. Il suit de là que les plans parallèles à ab, de même que ceux parallèles à AB, coupent le cône suivant des cercles.

On donne à ces deux systèmes de plans, AB, A'B', etc., d'une part, ab, $a'b'$, etc., d'autre part, qui, sans être parallèles, forment dans le cône des sections circulaires, le nom de *plans antiparallèles;* et aux sections qu'ils déterminent celui de *sections* ou de *cercles antiparallèles*.

Nous verrons plus loin (596) qu'il n'y a pas d'autres plans, que ceux

Pl. 36. Fig. 4 dont il vient d'être question, qui puissent couper le cône suivant des cercles.

532. Une section circulaire *ab* étant donnée, ainsi que le plan principal *Sba*, il est clair que les sections AB, A'B', antiparallèles à *ab*, seront telles que les angles SAB, SA'B', des plans de ces sections et de l'élément *Sb*, soient égaux à l'angle *Sab*, du plan *ab* et de l'élément *Sa*.

De même les angles SBA, SB'A', sont égaux à *Sba*.

Ces égalités d'angles caractérisent les plans antiparallèles : il faut toutefois bien remarquer que les élémens *Sb*, *Sa*, avec lesquels ils se trouvent formés, sont les intersections du cône et du plan principal.

533. On remarquera aussi que les centres de toutes les sections circulaires parallèles à AB, sont sur une droite SC, qui divise AB en deux parties égales, et qui est dans le plan principal ASB. Les centres des sections circulaires parallèles à *ab*, sont de même sur une droite SC', comprise dans le plan principal. D'où il suit que ce plan est caractérisé par la propriété de contenir les centres des sections antiparallèles AB, A'B', etc., *ab*, *a'b'*, etc.

On va voir découler de ce qui précède une suite de propriétés fort intéressantes dont jouissent les cordes du cercle.

534. DES POLES CONJUGUÉS, *et des cordes conjuguées, des cônes et des cercles* (*). Concevons dans l'espace un cône quelconque à base circulaire, et imaginons qu'une droite le perce en deux points; la portion de cette droite comprise entre ces points sera ce qu'on nomme une *corde* du cône. Nous appellerons une telle corde, *corde intérieure*, lorsqu'elle aura ses extrémités sur une même nappe, parce qu'elle sera effectivement dans l'intérieur du cône; et nous la nommerons, *corde extérieure*, lorsque ses extrémités seront sur les deux nappes opposées du cône, parce qu'elle sera dans ce cas au dehors de ce cône.

Suivant l'usage, nous donnerons souvent à la droite entière, dont une partie servira de corde à un cône, le même nom de corde qu'à cette

(*) La presque totalité de ce paragraphe et des deux suivans est due au *Mémoire* de M. Brianchon *sur les lignes du second ordre*, et surtout au *Traité des propriétés projectives* de M. Poncelet. Nous avons dû adopter pour ce chapitre la marche que nous suivons dans le reste de l'ouvrage, ce qui donne une physionomie neuve aux paragraphes dont il s'agit; mais le fond n'en appartient pas moins aux deux auteurs que nous venons de citer, et à M. Carnot, qui leur a ouvert la carrière par la *Géométrie de position*.

partie, et toutes les droites parallèles qui le rencontreront, même celles qui ne feront que le toucher, s'appelleront par cette raison des *cordes parallèles*.

535. Soit S le sommet d'un cône, et MNPQ le cercle qui lui sert de base; menons par le sommet S une droite SO, parallèle à un système de cordes parallèles quelconques, et soit O le point où cette droite percera le plan MNPQ. Il est clair que tous les plans menés par le même sommet, et par les cordes en question, passeront par la droite SO; d'où l'on voit que leurs traces TO, MO, VO, etc., sur le plan MNPQ, concourront au point O. Pl. 42. Fig. 1.

Nous donnerons à ce point le nom de *pôle* des cordes parallèles à SO (*). Il est évident que si ces cordes sont des cordes intérieures, le pôle O sera situé à l'extérieur de la base MNPQ, et qu'au contraire, si ce sont des cordes extérieures, le pôle O sera dans l'intérieur de MNPQ.

536. Parmi toutes les traces possibles TO, MO, VO, etc., il y en aura deux OT, OR, qui seront tangentes au cercle MNPQ, et qui détermineront, par leurs points de contact T et R, la corde TR de ce cercle. On donne à cette corde le nom de *corde polaire*, ou simplement de *polaire* du point O, et ce point prend par rapport à cette polaire, le même nom de *pôle* que nous lui donnons relativement aux cordes parallèles à SO.

537. Cela posé, soit *mnpq* un cercle antiparallèle à MNPQ; coupons ce cercle par un système de droites parallèles *v'r'*, *mn*, *tr*, etc., menées dans son plan; par le sommet S, menons une droite SO', parallèle aux droites de ce système, et par ce sommet et ces droites menons une suite de plans. Leurs traces sur MNPQ seront, comme on vient de le voir (535), une suite de droites V'R', MN, TR, etc., concourantes au pôle O', où la droite SO', parallèle à *v'r'*, *mn*, *tr*, etc., perce le plan MNPQ; et la droite VU, menée par les points du contact V et U des tangentes VO', UO', sera le polaire du point O'.

(*) Les traces des plans menés par le point S et par les cordes parallèles sont ce qu'on appelle les *perspectives* de ces cordes, sur le plan MNPQ, pour le point de vue S; et le point O est ce qu'on nomme *le point de concours* de ces perspectives.

Tout ce qui va suivre dans ce chapitre est principalement fondé sur ce principe : que les perspectives des droites parallèles concourent, et que des perspectives parallèles répondent à des droites concourantes (*Voyez le Traité de la Science du dessin*, liv. II, chap. III).

Pl. 42. Fig. 1. Si les droites $v'r'$, *mn*, *tr*, etc., varient de direction, en restant parallèles et comprises dans le plan *mnpq*, le pôle O' variera ; mais il ne sortira pas du plan mené par le sommet S, parallèlement à *mnpq*, puisque ce plan contient toutes les droites parallèles au plan *mnpq* menées par le point S : donc si la droite SO est parallèle aux cordes *mq*, *vu*, *np*, etc., ce pôle se mouvra sur la droite OO', intersection du plan MNPQ et du plan mené par le sommet parallèlement à *mnpq*.

Nous donnerons à cette droite OO' le nom d'*axe des pôles* de la section. Il est évident qu'il sera le même pour toutes les sections parallèles à *mnpq*.

538. Supposons que deux systèmes de droites *mn*, *tr*, *qp*, etc., d'une part, *mq*, *vu*, *np*, etc., d'autre part, fassent entre eux un angle droit, les tangentes aux extrémités des diamètres *tr*, *vu*, seront respectivement parallèles à ces diamètres, et feront conséquemment partie des systèmes de droites dont il s'agit ; d'où il suit que les tangentes aux extrémités des cordes TR, VU, concourront respectivement vers les pôles O et O', de *mq*, *vu*, *np*, etc., *mn*, *tr*, *qp*, etc.

Nous donnerons aux cordes TR, VU, liées par cette condition, le nom de *cordes conjuguées*, et aux trois points O, O' et O'', correspondans à ces cordes, celui de *pôles conjugués*.

539. Si l'on inscrit dans le cercle *mnpq* un rectangle quelconque *mnpq*, dont les côtés soient parallèles aux diamètres rectangulaires *tr*, *vu*, les plans menés par les côtés de ce rectangle, et par le sommet S, couperont le plan MNPQ suivant des droites MN et PQ, MQ et NP, respectivement concourantes en O et en O', et formant un quadrilatère MNPQ inscrit dans le cercle TURV.

Si le côté *mn* du rectangle *mnpq*, au lieu de couper le cercle en deux points *m* et *n*, le touche comme $v'r'$, le rectangle $v'r'u't'$, au lieu d'être inscrit comme *mnpq*, se trouvera circonscrit, et le quadrilatère correspondant T'U'R'V' se trouvera formé par les tangentes aux extrémités des cordes conjuguées TR, VU, lesquelles tangentes concourront aussi en O et en O'.

Enfin les diagonales de tous les rectangles inscrits, comme *mnpq*, et celles du rectangle circonscrit $t'u'r'v'$, se coupant toutes au centre *c*, les diagonales des quadrilatères inscrits comme MNPQ, et du quadrilatère circonscrit T'U'R'V', dont les côtés concourront en O et en O', auront pour point de concours de toutes leurs diagonales le point O'', où la droite *Sc*, lieu des centres des sections parallèles à *mnpq*, rencontre le plan MNPQ.

On voit donc que pour le quadrilatère T'U'R'V', et pour les quadrilatères tels que MNPQ, les pôles conjugués O, O' et O'', sont trois points où concourent, 1°. les côtés dirigés dans un sens, 2°. les côtés dirigés dans l'autre, 3°. les diagonales. Pl. 42. Fig. 1.

540. Ces propriétés du cercle MNPQ s'étendent, de la façon qu'on va voir, à un cercle quelconque TURV. Fig. 2.

Prenons arbitrairement un point O dans le plan de ce cercle; par ce point menons les tangentes OT, OR; construisons la polaire TR du point O; sur cette polaire prenons un point quelconque O'; par ce point menons les tangentes O'V, O'U; enfin menons la polaire VU du point O'. Les droites TR et VU, ainsi déterminées, seront deux cordes conjuguées, et les propriétés dont il s'agit auront lieu par rapport aux trois points O, O', et O'', qui seront des pôles conjugués.

541. Pour démontrer cette proposition, il suffira de trouver dans l'espace un cône, ayant pour base le cercle TURV, et tel que les droites menées par son sommet, et par les points O et O', soient rectangulaires entre elles, et parallèles aux cercles de ce cône antiparallèles à TURV; car il s'ensuivra que le cercle TURV sera, par rapport à l'un quelconque de ces cercles antiparallèles, ce que le cercle MNPQ est par rapport à *mnpq*. Fig. 1.

542. Concevons que le centre C, du cercle TURV, soit celui d'une sphère engendrée par ce cercle, et rapportons cette sphère à deux plans rectangulaires de projection, l'un supposé horizontal, qui sera le plan du grand cercle TURV, l'autre ωY, perpendiculaire à la droite OO'. Fig. 2.

Par cette droite menons un plan tangent ωz à la sphère; il la touchera en un point (O'', o), dont la projection horizontale O'' sera sur la droite CO'' perpendiculaire à OO'. Or, ce plan tangent ωz touchera tous les cônes qui auront leurs sommets sur la droite (OO', ω) et qui seront circonscrits à la sphère; et tous ces cônes toucheront la sphère suivant des cercles verticaux dont les plans passeront par la verticale (O'', $o'o$). Il suit de là, en premier lieu, que le plan ωz sera tangent aux cônes circonscrits à la sphère, qui ont leurs sommets en O et en O', suivant les élémens (OO'', ωz), (O'O'', ωz); en second lieu, que le point O'' sera situé dans les plans verticaux des cercles TR, VU, qui servent de bases à ces cônes, ou, ce qui revient au même, que le point O'', projection horizontale du point de contact o, sera l'intersection des cordes TR, VU.

On remarquera aussi que les mêmes cônes dont O et O' sont les sommets, étant des cônes droits, et la droite (O'O'', ωz), étant tangente en

Pl. 42. Fig. 2. (O'', o) à la base de celui dont le sommet est en O, cette droite est nécessairement perpendiculaire à l'élément $(OO'', \omega z)$: c'est-à-dire que les droites $(O'O'', \omega z)$, $(OO'', \omega z)$, sont rectangulaires entre elles.

Cela posé, considérons le cône qui a son sommet dans le plan $SO''C$, au point projeté verticalement à l'intersection S' des droites Yo, $o'X$, et dont la base est le grand cercle (TURV, XY). Ce cône coupera la sphère suivant un second cercle, auquel appartiendront les points o et o', et ce cercle sera situé symétriquement par rapport au plan $O''S$. Mais les angles $S'YX$, $oo'S'$, ont pour mesure la moitié de l'arc oX; donc ils sont égaux; donc les plans oo' et XY sont antiparallèles (532) : donc le cercle $o'o$ est à la fois sur la sphère et sur le cône (*). Donc enfin ce cercle $o'o$, dont xx' est la projection horizontale, est une ligne d'intersection de ces deux surfaces.

Concevons que le point (S, ω), où se coupent CO'' et OO', soit le sommet d'un cône circonscrit à la sphère; il la touchera suivant le cercle en question $(xx', o'o)$, et les plans Sx, Sx', seront tout-à-la-fois tangens en (x, K) et en (x', K), au cône Sxx', à la sphère, et au cône $S'XY$. Or, ces plans tangens contiennent les sommets (S, ω) et S' de ces cônes, et ils se couperont évidemment suivant la verticale élevée par le sommet (S, ω); donc cette verticale contiendra le sommet S'; donc le point S sera la projection horizontale du sommet S' : ce qui montre que $\omega S'$ et $o'o$ sont deux droites parallèles.

Il s'ensuit que les angles $\omega S'o$, KoY, sont égaux. Et comme l'angle $\omega oS'$ égale zoY, lequel a pour mesure la moitié de l'arc onY, ou la moitié de $o'mY$, qui est aussi la mesure de l'angle $o'oY$, ou KoY, on voit qu'on a

$$\omega oS' = KoY = \omega S'o.$$

D'où nous conclurons que le triangle $\omega S'o$ est isoscèle, et que $\omega o = \omega S'$.

Il résulte de là que si l'on fait tourner le triangle $(OO''O', \omega o)$, rectangle en (O'', o), autour de l'hypoténuse (OO', ω), le sommet (O'', o) de ce triangle décrira un arc de cercle (CS, oS'), passant par le point (S, S'). Si donc ce triangle s'arrête dans son mouvement au plan vertical $\omega S'$, ses

(*) Il suit de là, 1°. que tout cône qui entre dans une sphère par un cercle XY, en sort par un autre cercle oo', antiparallèle au premier; 2°. que deux cercles d'une même sphère, lorsque leurs plans sont perpendiculaires à celui d'un même grand cercle, déterminent un cône dont ils sont deux sections antiparallèles.

côtés toujours rectangulaires entre eux, passeront par le sommet (S, S') du cône S'XY, et ils seront parallèles à la section *o'o*, antiparallèle à XY, en sorte que le cône S'XY sera celui qu'il s'agissait de trouver pour démontrer la propriété qui nous occupe. Pl. 42. Fig. 2.

543. TURV étant donc un cercle quelconque, O un point pris arbitrairement sur son plan, O' un point choisi comme on voudra sur la polaire TR du point O, on peut poser en principe, 1°. que la polaire VU du point O' passe par le point O; 2°. que TR et VU sont des cordes conjuguées; 3°. que les points O, O' et O'', sont des pôles conjugués; 4°. que le quadrilatère circonscrit T'U'R'V', formé par les tangentes aux extrémités des cordes conjuguées TR, VU, a ses côtés respectivement dirigés sur les pôles extérieurs O et O'; 5°. que si d'un point M de TURV, on mène aux pôles O et O' les droites MO, MO', puis, que des points N et Q, déterminés par ces droites, on mène d'autres droites NO, QO', ces dernières se couperont sur le cercle TURV, en un point P qui achèvera le quadrilatère inscrit MNPQ, dont les côtés respectifs concourront en O et en O'; 6°. enfin, que les diagonales du quadrilatère circonscrit T'U'R'V', et celles des quadrilatères inscrits, tels que MNPQ, se coupent suivant le pôle intérieur O'' (*).

On remarquera en passant que si les pôles O et O' variaient sur la droite OO', le pôle O'' ne changerait pas de position. De même si les pôles O' et O'' variaient sur la droite O'O'', ou que O et O'' variassent sur la droite OO'', les pôles respectifs O et O' conserveraient une position fixe.

544. Les cordes conjuguées TR, VU, ayant pour caractère que les tangentes à leurs extrémités se coupent suivant les pôles respectifs O et O', il

---

(*) Cette belle propriété des cordes polaires du cercle donne pour la sphère les corollaires suivans:

1°. TR étant le plan de la base d'un cône circonscrit à la sphère TURV, tout cône, aussi circonscrit à cette sphère, dont le sommet O' sera dans le plan TR, aura pour plan de sa base sur la sphère un plan contenant le sommet O.

2°. Si le sommet O d'un cône circonscrit à la sphère se meut sur la verticale O, qui est une droite quelconque située hors de la sphère, les plans de tous les cercles qui serviront successivement de base au cône mobile, se couperont suivant la polaire TR du point O.

3°. Si le sommet O se meut dans un plan quelconque OV, coupant la sphère, les plans de toutes les bases passeront par le sommet O' du cône qui a pour base le cercle VU, intersection de la sphère et du plan OV.

s'ensuit que deux diamètres rectangulaires sont deux cordes conjuguées, puisque les tangentes aux extrémités de ces diamètres se coupent en des points, situés à l'infini, qui sont justement leurs pôles respectifs. On nomme ces diamètres des *diamètres conjugués*.

Chaque cercle a par conséquent une infinité de systèmes de diamètres conjugués. Nous allons voir que toutes les sections coniques ont une propriété analogue.

545. DES DIAMÈTRES CONJUGUÉS *des sections coniques*. Concevons dans l'espace un cône à base circulaire coupé par un plan suivant une courbe fermée, et rapportons ce cône et ce plan à deux plans rectangulaires de projection, l'un supposé horizontal, qui sera celui de la base, et l'autre
Pl. 43. Fig. 4. perpendiculaire au plan coupant. D'après cela, soit (S, S′) le sommet du cône, TURV sa base, (AB, BD) le plan coupant, et (*mnpq*, EF) la section du cône et du plan donnés.

546. Par le sommet (S, S′) menons un plan ($\omega'\omega$, ωS′), parallèle au plan (AB, BD). Sa trace horizontale $\omega'\omega$ sera (537), sur le plan de la base TURV, l'axe des pôles de toutes les cordes intérieures du cône situées dans des plans parallèles à (AB, BD).

Sur cet axe $\omega'\omega$ prenons arbitrairement un pôle O; menons les tangentes OT, OR, qui déterminent la polaire TR du point O; par le point O′, où cette polaire coupe la droite $\omega'\omega$, menons les tangentes O′V, O′U, et par les points de contact V et U de ces tangentes, menons la droite VUO. Les cordes TR, VU, ainsi construites, seront deux cordes conjuguées, et les points O, O′ et O″, formeront ce que nous appelons un système de pôles conjugués (543).

547. Cela posé, imaginons des plans passant par le sommet (S, S′) et par les droites T′U′, TR, V′R′, qui concourent en O′. Ces plans contiendront la droite (SO′, S′ω), parallèle au plan (AB, BD); donc ils couperont ce plan suivant des parallèles à cette droite. Donc, si par les points x', k', w', où la droite AB est coupée par T′U′, TR et V′R′, on mène parallèlement à SO′, les droites $x't'$, $k't$, $w'v'$, ces droites seront les projections horizontales des intersections ($x't'$, BD), ($k't$, BD), ($w'v'$, BD), du plan (AB, BD), et des plans menés par le sommet (S, S′) et par les droites T′U′, TR, V′R′. De même, les intersections du plan (AB, BD), et des plans menés par (S, S′) et par les droites V′T′, VU, R′U′, concourantes en O, seront des droites (xv', BD), (kv, BD), (wr', BD), dont les projec-

tions horizontales passent par les points x, k, w, et sont parallèles à SO. Pl. 43. Fig. 4.

Il suit de là que sur le plan (AB, BD), de la section (*mnpq*, EF), le quadrilatère circonscrit T′U′R′V′ donne un parallélogramme (*t′u′r′v′*, BD) circonscrit à cette section, et tel que les droites (*tr*, BD), (*vu*, BD) contiennent les points de contact projetés en t, u, r et v, des côtés de ce parallélogramme. Mais les diagonales du quadrilatère T′U′R′V′ se coupent en O″, à l'intersection de TR et VU (543); donc celles du parallélogramme (*t′u′r′v′*, BD) se coupent au point (c, c') projeté horizontalement en c, à l'intersection de *tr* et *vu*. D'où nous conclurons que ce point est le centre du parallélogramme (*t′u′r′v′*, BD), et que les droites (*tr*, BD), (*vu*, BD) se divisent en ce même point respectivement en deux parties égales.

548. Supposons que le pôle O varie sur l'axe des pôles OO′, le pôle O′ variera aussi ; mais le pôle O″ ne variera pas (543) : donc le point (c, c') ne variera pas non plus ; car il est l'intersection du plan (AB, BD) et de la droite menée par les points (S, S′) et O″. Donc enfin les nouvelles droites, analogues à (*tr*, BD), (*vu*, BD), présenteront autour du point (c, c') toutes les circonstances qui viennent d'être détaillées.

Si l'on imagine que le point T parcoure tout le cercle TURV, et qu'il emmène avec lui le pôle O situé sur la tangente TO, et le pôle O′ situé sur la corde TO″, il est clair que le point t décrira la courbe *mnpq* (*), et que la droite *tr* aura successivement autour du point c toutes les positions possibles, sans cesser d'être divisée en deux parties égales par ce point. La section conique fermée (*mnpq*, EF) a donc, au point (c, c'), ce que l'on nomme un *centre* (859), et toutes les droites menées par ce centre, dans le plan (AB, BD), sont ce qu'on appelle des *diamètres*.

549. De plus, la section (*mnpq*, EF) est telle que les tangentes *v′t′*, *u′r′*, aux extrémités de chaque diamètre *tr*, sont parallèles entre elles et à un autre diamètre *vu*, qui, réciproquement, jouit de la propriété que les tangentes à ses extrémités sont parallèles au premier. On nomme ces diamètres *tr* et *vu* des *diamètres conjugués*.

550. Prenons un point quelconque M sur la base TURV ; par ce point menons les droites MO, MO′; par les points N et Q, où elles rencontrent

(*) Pour abréger, il nous arrivera, dans ce chapitre, de citer des grandeurs situées dans l'espace, sans indiquer autre chose que leur projection horizontale. C'est ainsi que nous disons *le point t*, *la courbe mnpq*, etc., au lieu de dire *le point du plan* (AB, BD) *projeté en t*, *la courbe* (*mnpq*, EF), etc.

Pl. 43. Fig. 4. le cercle TURV, menons NO′ et QO : ces dernières droites se couperont en un point P′ de TURV (543); ainsi le quadrilatère MNPQ se trouvera inscrit dans la base du cône donné. Par les côtés de ce quadrilatère et par le sommet (S, S′) imaginons des plans : ils couperont le plan (AB, BD), de la section, suivant les droites *mn*, *np*, *pq*, *qm*, faciles à construire, et respectivement parallèles à *tr* et à *vu*, ce qui montre que la figure *mnpq*, inscrite dans la section, sera un parallélogramme. Et comme les diagonales de MNPQ se coupent au point O″ (543), celles de *mnpq* se couperont en *c*; d'où il suit que les quatre cordes *mn* et *pq*, *mq* et *pn*, respectivement parallèles aux diamètres conjugués *tr* et *vu*, sont divisées par ces diamètres, chacune en deux parties égales.

Or le point M étant pris arbitrairement sur la base, le point *m* est un point quelconque de la section; donc toute corde *mn*, parallèle à un diamètre *vu*, est divisée en parties égales par le diamètre *tr* conjugué à *vu*, ou, ce qui revient au même, chaque diamètre est le lieu des milieux de toutes les cordes parallèles à son conjugué.

Fig. 1. 551. Par cela seul qu'un diamètre *tr*, de la section qui nous occupe, divise en deux parties égales un système de cordes parallèles *mn*, *m′n′*, etc., il prend par rapport à ces cordes le nom de *diamètre conjugué*, parce que le diamètre *vu*, qui leur est parallèle, et qui détermine leur commune direction, est nécessairement le diamètre conjugué de *tr*.

Pour démontrer cette propriété, on remarquera d'abord que la parallèle aux cordes *mn*, *m′n′*, etc., menée par une extrémité *r* de *tr*, est tangente à la section : car, si elle la coupait en un autre point *r′*, le diamètre *tr* ne passerait pas par le milieu de *rr′*, ce qui est contre l'hypothèse. Cela posé, par le centre *c*, de la section *mnpq*, menons la droite *vu* parallèle à *mn*, *m′n′*, etc.; cette droite sera parallèle aux tangentes en *t* et en *r*. Par le point *n*, qui est un point quelconque de la même section *mnpq*, menons la droite *np*, parallèle à *tr*; puis, par le point *p*, menons *pq* parallèle à *mn* : *pq* sera divisée en deux parties égales par *tr*, et si l'on joint les points *m* et *q* par la droite *mq*, elle sera parallèle à *np*, et la figure *mnpq* sera un parallélogramme. Or, si l'on mène par le point *n* un diamètre, il coupera la courbe, à l'opposé de *n*, en un point éloigné du point *c* de la distance *cn*; donc il la coupera justement en *q*. De même, le diamètre mené par le point *m* sera *mp*; donc le parallélogramme *mnpq* sera tel que la corde quelconque *np*, parallèle à *tr*, soit divisée en parties égales par *vu* : donc les tangentes aux extrémités *v* et *u*, de *vu*, seront parallèles à *tr*. Donc, etc.

552. Parmi les différens systèmes de diamètres conjugués, il y en a un où ces diamètres sont rectangulaires. En effet le pôle O étant pris à l'infini, en deçà du plan vertical, le pôle O' sera en ω', à l'intersection de la perpendiculaire $O''\omega'$, abaissée par le point O'' sur $\omega'\omega$; et les deux diamètres analogues à (tr, BD), (vu, BD), dont l'angle est celui des droites (SO, S'ω), (SO', S'ω), feront entre eux un angle $\omega' s\theta$, déterminé, premièrement, par la droite $\omega' s$, qui joint le point ω', et le rabattement s de (S, S') autour de $\omega'\omega$; secondement, par la droite $s\theta$, menée par le point s parallèlement à $\omega'\omega$. Si le pôle O vient en ω', le pôle O' s'en ira à l'infini au-delà du plan vertical, et l'angle des diamètres analogues à (tr, BD), (vu, BD), sera celui $\omega' s\theta'$, de la même droite $\omega' s$, et du prolongement $s\theta'$ de $s\theta$. Mais quelle que soit la position du sommet (S, S'), par rapport à la base TURV, les deux angles $\theta s\omega'$, $\omega' s\theta'$, seront toujours supplémens l'un de l'autre : d'où il suit que dans le mouvement du pôle O sur la ligne $\omega'\omega$, depuis l'infini en deçà du plan vertical, jusqu'à l'infini au-delà, l'angle des deux diamètres conjugués (tr, BD), (vu, BD), aigu d'abord, deviendra obtus, ou bien, obtus d'abord, il deviendra aigu, et jamais il ne sera nul ; car il faudrait pour cela que les pôles O et O' se trouvassent réunis, ce qui est impossible. Donc il y aura une position des pôles O et O' où l'angle des diamètres conjugués sera droit (617). Pl. 43. Fig. 4.

553. On donne le nom d'*axes* à ces diamètres particuliers rectangulaires A'A, B'B, et l'on nomme *sommets* de la section, les quatre points A', B', A, B, où elle est coupée par les axes. Fig. 5.

Il suit des propriétés qu'on vient de démontrer pour les diamètres conjugués, que les tangentes aux sommets sont perpendiculaires aux deux axes AA', B'B, et que ces axes divisent la section A'B'AB en quatre parties égales.

554. Supposons maintenant que le plan coupant rencontre les deux nappes du cône : c'est-à-dire que la section conique ait deux branches. En suivant pour cette section la marche que nous venons de suivre pour la section fermée, nous allons être conduits à des résultats tout-à-fait analogues à ceux que nous venons d'obtenir.

Le cône étant toujours rapporté à deux plans rectangulaires (l'un supposé horizontal, qui soit celui de la base TURV, l'autre perpendiculaire au plan de la section), soit (S, S') son sommet, (AB, BD) le plan coupant, et ($puq\ldots mvn$, BD) la section conique dont il s'agit. Pl. 44. Fig. 1.

555. Par le sommet (S, S') menons un plan ($\omega'\omega$, ωS'), parallèle au plan

Pl. 44. Fig. 1. coupant, il aura pour trace horizontale une droite $\omega'\omega$, parallèle à AB, et cette droite, qui rencontrera la base TURV, puisque le plan coupant rencontre les deux nappes, sera l'axe des pôles (537) des sections parallèles à (AB, BD).

Construisons le pôle O″ de TR, et prenons sur $\omega'\omega$ un point quelconque O′. La polaire VU de ce point passera par le pôle O″; les droites TR, VU, seront deux cordes conjuguées, et les trois points O, O′ et O″, seront trois pôles conjugués (543). Enfin, après avoir formé le quadrilatère circonscrit T′U′R′V′, prenons arbitrairement un point M sur TURV; menons les droites MO″, MO′, puis NO″ et QO′, et nous formerons le quadrilatère inscrit MNPQ, dont les diagonales MP, NQ, ainsi que celles T′R′, V′U′, se couperont au point O (543).

556. Par les côtés de ces quadrilatères, par leurs diagonales, et par la droite O′O″, menons des plans passant par le sommet (S, S′), et voyons comment ils couperont le plan (AB, BD). Ceux qui passeront par les droites qui concourent en O contiendront la droite (SO, S′ω); donc ils couperont le plan (AB, BD) suivant des droites (wn, BD), (zr', BD), (kv, BD), (yv', BD), (xm, BD) parallèles à (SO, S′ω). Ceux qui passeront par les droites qui concourent en O′ contiendront la droite (SO′, S′ω); donc ils couperont le plan (AB, BD) suivant des droites ($w'n$, BD), ($z'r'$, BD), ($k'c$, BD), ($y't'$, BD), ($x'q$, BD) parallèles à (SO′, S′ω). Ceux enfin qui passeront par les droites qui concourent en O″ contiendront la droite menée par le point (S, S′) et par le point O″; mais cette droite perce le plan (AB, BD) au point (c, c'), projeté en c, où se coupent les droites SO″ et $k'c$: donc les intersections ($v't'$, BD), ($r'u'$, BD), (mq, BD), (np BD), de ces plans et du plan (AB, BD), se couperont au point (c, c').

Il suit de là que les figures ($t'u'v'r'$, BD), ($mnqp$, BD) seront des parallélogrammes dont les diagonales se couperont au point (c, c'); que les figures MNPQ, T′U′R′V′, de la base, répondront à des doubles triangles $mncpqcm$, $t'u'cr'v'ct'$, opposés par le sommet et à bases parallèles; et que la droite (kc, BD), qui détermine sur ($z'v$, BD) et ($y'u$, BD) les points projetés en v et en u, suivant lesquels les tangentes ($v'r'$, BD), ($u't'$, BD) touchent la section, divise en deux parties égales toutes les cordes, telles que (mn, BD), (qp, BD), parallèles à ces tangentes.

557. Imaginons que le point O′ varie sur $\omega'\omega$; le point O″ ne variera pas (543), et quoique le point O change alors de position sur $\omega'\omega$, le point (c, c') ne changera pas; car il sera constamment l'intersection du plan (AB, BD) et de la droite menée par les points (S, S′) et O″: les pro-

priétés qu'on vient de voir subsisteront donc pour toutes les positions que prendront les pôles O, O′ et O″. Pl. 44. Fig. 1.

558. Supposons que le point U parcoure le cercle TURV, et que le pôle O se meuve avec lui ; il est clair que le point *u* parcourra la section tout entière, et que, dans chacune des positions du point *u*, la droite (*vu*, BD), qui est une droite quelconque menée par le point (*c*, *c′*) et terminée de part et d'autre à la section, sera divisée en deux parties égales projetées horizontalement en *uc* et *cv*. C'est-à-dire que cette section a un *centre* (*c*, *c′*), et que toute droite comme (*vu*, BD) est un de ses *diamètres*.

559. Et chaque diamètre *vu* divisant en parties égales, ainsi qu'on vient de le voir (556), les cordes parallèles aux tangentes *v′r′*, *u′t′*, en *v* et *u*, il est ce qu'on nomme, par analogie avec ce qui arrive à la section fermée (551), un *diamètre conjugué* à celui qui serait mené par le centre *c* parallèlement à ces cordes. Quant à ce dernier, il est évident qu'il ne rencontre pas la courbe ; on le nomme par cette raison *diamètre imaginaire*, et l'on donne à chaque diamètre, tel que *vu*, le nom de *diamètre réel*.

560. Si par le sommet (S, S′) on mène un plan perpendiculaire à la droite qui joint ce sommet et le pôle O″, ce plan coupera l'axe des pôles $\omega'\omega$ en un point, et ce point, pris pour pôle en place du point O′, donnera un système de diamètres conjugués rectangulaires.

561. Ces diamètres, qui d'après cela se construiront facilement, sont ce qu'on appelle les *axes* de la section *mvn...puq*.

Celui A′A qui la coupe est son *axe réel* ; l'autre B′B est son *axe imaginaire*, et les extrémités A′ et A se nomment les *sommets* de cette section. Fig. 3.

562. L'axe des pôles $\omega'\omega$ rencontrant la base en deux points R et T, il en résulte une propriété bien remarquable que nous allons exposer. Prenons le point R pour pôle : les points V et U se trouveront réunis en R, et les points *v* et *u*, de la courbe, se trouveront à l'infini aux deux extrémités de la droite $r'c\sigma$ menée par le centre *c* et par le point σ. De plus, les tangentes analogues à *v′r′*, *u′t′*, coïncideront avec cette droite, d'où l'on voit qu'elle sera tout-à-la-fois un diamètre de la section, et l'asymptote à ses deux parties *vn*, *upn*. Fig. 1.

De même le pôle O′ étant pris en T, le diamètre *vu* sera la droite $v'c\theta$, menée par le centre *c* et par le point θ, droite qui sera l'asymptote des deux parties $vm\zeta$, $uq\lambda$.

563. Passons au cas de la section conique ouverte à une seule branche.

Pl. 45. Fig. 4. On sait (525) que le plan de cette section est parallèle à l'un des plans tangens du cône. D'après cela, ayant pris pour plan vertical un plan perpendiculaire au plan coupant et au plan de la base, soit M'ON'V cette base, (S, S') le sommet, (AB, BD) le plan coupant, et (*amvnb*, BD) la section.

564. Par le sommet (S, S') menons un plan ($\omega'\omega$, ωS'), parallèle au plan coupant; il sera tangent au cône (525) suivant un élément (SO, S'ω), et la trace $\omega'\omega$ sera l'axe des pôles des sections parallèles à BD (537).

Ayant pris arbitrairement un point O' sur $\omega'\omega$, construisons la polaire VO de ce point (536). Il est clair que la polaire du point O sera ce point lui-même; qu'il sera, comme corde, la conjuguée de VO; qu'il sera la réunion des deux pôles, l'un intérieur, l'autre extérieur, que présente ordinairement chaque corde, et que les deux points O' et O, dont le dernier est censé double, formeront un système de pôles conjugués (543).

565. Si nous prenons sur la base M'ON'V un point quelconque M; que pour ce point nous construisions (543) le quadrilatère dont les côtés concourent en O et en O', ce quadrilatère aura un de ses côtés contracté en O, et il se réduira au triangle MNO. Quant au quadrilatère circonscrit dont il a été question dans le cas de la section fermée, et dans celui de la section à deux branches, il se trouvera réduit aux deux droites O'V, O'O, comprises entre le point O' et l'infini au-dessous de ce point.

566. Cela posé, concevons par les droites MO, VO, NO, d'une part, VO' et MO', d'autre part, une suite de plans passant par le sommet du cône, et voyons comment ils couperont le plan (AB, BD). Ceux dont les traces MO, VO, NO, concourent en O, le couperont suivant des droites (*xm*, BD), (*kv*, BD), (*yn*, BD), parallèles à (SO, S'ω); et ceux dont les traces VO', MO', concourent en O', le couperont suivant des droites (*zm*, BD), (*wv*, BD), parallèles à (SO', S'ω). L'analogie avec le cas de la section fermée, et avec celui de la section à deux branches, se trouvera conservée, en ce que les droites MO, VO, NO, qui concourent en O, donnent un système de droites parallèles (*xm*, BD), (*kv*, BD), (*yn*, BD); en ce que les droites VO', MO', concourantes en O', donnent un autre système de droites parallèles (*wv*, BD), (*zm*, BD); en ce que la droite (*wv*, BD) est tangente à la section à l'extrémité *v* de la droite (*kv*, BD); enfin, comme on va le voir, en ce que cette dernière droite, qui correspond à la corde polaire OV, coupe toute corde (*mn*, BD), correspondante à une corde MN, dirigée au pôle O' de OV, et parallèle à la tangente (*wv*, BD), en deux parties égales *mi*, *in*.

567. Pour démontrer cette dernière propriété, menons par le centre C de la base, la droite O'N'CM'; et par les points N' et M', où elle coupe le cercle M'ON'V, menons les droites N'O, M'O, et la droite N'EFG, parallèle à OO'. Les arcs OM' et M'V seront égaux, ainsi que VN', N'O et OG. Or, l'angle GN'O aura pour mesure la moitié de l'arc GO, ou la moitié de son égal VN', il sera donc égal à l'angle VON'; donc le triangle N'EO sera isoscèle, ce qui donne N'E = EO. On a aussi : Pl. 45. Fig. 4.

$$\text{EOF} = \frac{\text{VM}'}{2} = \frac{\text{OM}'}{2} = \frac{\text{OG}}{2} + \frac{\text{GM}'}{2} = \frac{\text{ON}'}{2} + \frac{\text{GM}'}{2} = \text{N}'\text{FO}\ ;$$

donc le triangle EFO est isoscèle; donc EO = EF. Donc enfin EF = EN'.

Actuellement, faisons sur la droite M'O' les constructions que nous avons faites sur MO'; nous obtiendrons les points m' et n' de la projection *amvnb* de la section, et la droite $m'n'$ sera parallèle à mn. Et comme EF = EN', on aura $kx' = ky'$, ce qui donne $i'm' = i'n'$.

Menons par les points M et M' la droite MM'; elle déterminera sur VO un point H, dont la polaire sera conjuguée à VO; donc si l'on mène par le point N' la droite N'H, elle coupera MO' justement au point N d'intersection de MO' et du cercle M'ON'V, puisque le quadrilatère MM'N'N devra être inscrit dans ce cercle : donc les droites M'M, N'N, menées par les points M et M', N et N', concourront au même point H de VO.

Il suit de là que si par les droites M'H, N'H, et par le sommet du cône, on mène des plans, ils couperont le plan (AB, BD) suivant des droites dont les projections $m'mh$, $n'nh$, se rencontreront en un point h de kv. Mais puisque $i'm' = i'n'$, et que mn est parallèle à $m'n'$, il s'ensuit que $mi = in$: ce qu'il fallait démontrer.

568. Si l'on fait parcourir au point V le cercle entier M'ON'V, le pôle O' parcourra toute la section; toutes les droites telles que (kv, BD) seront parallèles entre elles et à la droite (SO, S'ω), et pour toutes les positions de la ligne (kv, BD), cette ligne divisera en parties égales les cordes, telles que (mn, BD), parallèles à la tangente (wr, BD) au point, projeté en v, où se rencontreront la droite (kv, BD) et la section.

Cette propriété, analogue à celles qu'on a vues n°s 551 et 559, fait donner aux lignes telles que (vk, BD) le nom de *diamètres conjugués*, ou simplement de *diamètres*.

569. Ces diamètres étant parallèles ne se rencontrent qu'à l'infini; ainsi le point analogue au centre de la section fermée et de la section à deux

Pl. 43. Fig. 5. branches est à l'infini : c'est-à-dire que la section ouverte à une branche n'a pas, à proprement parler, ce qu'on appelle un centre. Par la même raison le conjugué d'un diamètre (kv, BD) n'existe pas.

570. Si par le sommet (S, S') on mène un plan perpendiculaire à la droite (SO, S'ω), il coupera l'axe des pôles $\omega'\omega$ en un point, et il est évident que ce point étant pris pour pôle, le diamètre analogue à (kv, BD), et la tangente correspondante (uv, BD), se trouveront à angle droit. Ce diamètre coupera par conséquent les cordes qui lui seront perpendiculaires en deux parties égales.

On donne à ce diamètre, qu'il sera très facile de déterminer, le nom d'*axe* de la section, et on appelle *sommet* de cette section le point, analogue au point projeté en v, où il la coupe.

571. Il nous reste encore un cas fort important à examiner, c'est celui où le sommet du cône est à l'infini. Alors la surface donnée est un cylindre à base circulaire TURV, dirigé d'une manière quelconque (Cc, C'c') dans l'espace; la section, à moins qu'elle ne soit composée de lignes droites, est une courbe fermée (*turv*, BD), et l'axe des pôles est à l'infini, et parallèle à la trace horizontale AB du plan coupant (AB, BD).

Pl. 43. Fig. 2.

Or, chaque pôle situé sur $\omega'\omega$ étant à l'infini, les cordes conjuguées, correspondantes à ces pôles, seront des diamètres rectangulaires TR, VU, de la base TURV. Les plans menés par ces diamètres, parallèlement au cylindre, auront pour traces les droites Vζ, Tφ; ils se couperont suivant la droite (Cc, C'c'), et ils couperont le plan (AB, BD) de la section, suivant des droites (ζc, BD), (φc, BD), qui seront de véritables *diamètres conjugués* de cette section (549), et qui se couperont suivant son *centre* (c, c'). En effet, au carré TU'R'V', formé par les tangentes T'λ et Rθ, Uπ et Vψ, menées aux extrémités de TR et VU, il correspondra un parallélogramme $t'u'r'v'$, formé par les droites λt et θr, πu et ψv, intersections des plans parallèles au cylindre menés par les tangentes T'λ et Rθ, Uπ et Vψ; donc ces droites λt et θr, πu et ψv, seront tangentes aux extrémités de tr et vu : donc etc.

572. Il est aisé de s'assurer que si le point T se meut tout autour de TURV, le point t se mouvra tout autour de *turv*, et que toutes les droites comme tr et vu ne cesseront pas d'être des diamètres conjugués. En appliquant d'ailleurs à la figure qui nous occupe les raisonnemens du n° 552, on reconnaîtra qu'il y a toujours un système de ces diamètres dans lequel

ils font entre eux un angle droit (619), d'où il suit que les propriétés des diamètres conjugués, des axes, etc., démontrés plus haut (549 — 553) pour la section fermée du cône, ont lieu pour celle du cylindre.

573. Ce qui précède nous met à même de faire quelques remarques utiles sur la manière dont la section fermée, la section à deux branches, et la section ouverte, qui sont trois modifications de l'intersection du cône et du plan, se transmuent les unes dans les autres.

Si la section est fermée, la droite menée par le centre (c, c'), et par le sommet (S, S'), perce le plan de la base en un point O″, qui est un pôle invariable appartenant à tous les systèmes de pôles conjugués qui correspondent à la section. Toutes les cordes de cette section sont des cordes intérieures du cône, et leurs pôles O et O′ sont situés à l'extérieur de la base TURV, sur l'axe des pôles OO′. Pl. 43. Fig. 14

Si le plan coupant BD se meut autour du point E, de manière à devenir peu à peu parallèle au plan tangent S′F, la section s'alongera, et le pôle O″ s'approchera de la circonférence TURV. Si ce plan devient enfin parallèle au plan tangent, le centre (c, c') passera à l'infini; le pôle correspondant à la droite menée par les points (S, S'), (c, c'), sera sur la ligne TURV; tous les diamètres seront parallèles, et toutes les cordes parallèles à ces diamètres auront leur pôle réuni au précédent suivant le point O, où l'axe des pôles OO′ touchera la base TURV. De sorte que deux pôles étant confondus en O, chaque système de trois pôles conjugués se réduira à deux points O et O′, dont le dernier seul sera variable. Pl. 45. Fig. 4.

Si le plan coupant, en continuant de se mouvoir, vient à couper les deux nappes, la section aura deux branches; les pôles qui s'étaient réunis dans la section ouverte se trouveront séparés; celui O″, qui correspondait au centre (c, c'), et qui était dans l'intérieur de la base, passera à l'extérieur, parce que le centre (c, c'), de la nouvelle section, se trouvera entre ses deux branches, à l'extérieur du cône; et celui O, qui correspondra aux diamètres réels, passera dans l'intérieur, attendu que ces diamètres seront tous des cordes extérieures. Ces mêmes diamètres étant compris dans l'angle projeté en $\theta c r$, et formé par les asymptotes $(c\theta, c'B)$, $(cr, c'B)$, les diverses positions que pourra prendre le pôle O seront situées sur la partie TR, de l'axe $\omega'\omega$ des pôles, comprise dans le cercle TURV; les diamètres imaginaires étant compris dans l'angle $\theta c r'$, supplément de $\theta c r$, les pôles correspondans à ces diamètres et aux cordes qui leur seront parallèles seront situés, sur l'axe des pôles, au-dehors de la partie TR, et des trois pôles O, O′, O″, le seul pôle O″ aura une position invariable. Pl. 43. Fig. 4. Pl. 44. Fig. 1.

574. **LES SECTIONS CONIQUES** *sont des ellipses, des hyperboles, ou des paraboles* (*). Le cercle jouit, comme on le sait, de la propriété que

(*) Nous avions d'abord démontré, au moyen d'un grand nombre de proportions, suivant la marche des anciens, les propriétés caractéristiques de l'ellipse, de l'hyperbole et de la parabole : nous avons préféré suivre la marche de M. Poncelet; peut-être est-

Pl. 42. Fig. 3. s'il est coupé par trois sécantes PQ, QR, RP, absolument quelconques, on a,

$$PO \times PO' = PM' \times PM;$$
$$QN \times QN' = QO' \times QO;$$
$$RM \times RM' = RN' \times RN.$$

D'où l'on tire, en multipliant membre à membre,

$$PO \times PO'.QN \times QN'.RM \times RM' = PM' \times PM.RN' \times RN.QO' \times QO \ldots (a),$$

ce qui donne ce théorème : *Le produit des segmens* PO, PO′, QN, QN′, *etc., adjacens aux sommets* P, Q, R, *dans le sens* PQR, *est égal à celui des segmens* PM′, PM, RN′, RN, etc., *adjacens aux mêmes sommets, dans le sens* PRQ (*).

575. Concevons que le cercle OMN serve de base à un cône dont le sommet soit choisi arbitrairement; imaginons que ce même sommet soit celui d'une pyramide dont le triangle PQR soit la base, et supposons que ce cône et cette pyramide soient coupés par un plan quelconque. La section de ce plan sera, en général, telle qu'on la voit fig. 6, fig. 7, ou fig. 8; car le cône sera coupé suivant une courbe fermée, suivant une courbe à deux branches, ou suivant une courbe ouverte, et la pyramide suivant un triangle *pqr*. Or, quelle que soit cette section, on va voir que le théorème précédent s'y applique : c'est-à-dire qu'on a

Fig. 6, 7 et 8.

$$po \times po'.qn \times qn'.rm \times rm' = pm' \times pm.rn' \times rn.qo' \times qo \ldots (b).$$

Fig. 3, 4, 6, 7 et 8. 576. Par le sommet S du cône (*fig.* 4), et par le segment quelconque PO de la base (*fig.* 3 et *fig.* 4), faisons passer un plan; il contiendra le segment *po* (*fig.* 4, *fig.* 6, *fig.* 7 et *fig.* 8), correspondant à PO (*fig.* 3 et

Fig. 4. *fig.* 4), et les points S, P, *p*, seront en ligne droite, ainsi que S, O et *o*. Les deux triangles SPO, S*po*, auront donc l'angle SPO commun, ce qui donnera,

$$SPO : Spo :: SP \times SO : Sp \times So,$$

ou

$$\frac{SPO}{SP \times SO} = \frac{Spo}{Sp \times So} \ldots\ldots\ldots\ldots (c).$$

---

elle un peu plus difficile; mais elle est plus courte, moins fatigante, et d'une grande élégance.

(*) Voyez le *Traité des propriétés projectives*, page 18 et suivantes.

D'où nous conclurons que le rapport de la surface triangulaire SPO, et du rectangle SP × SO, des côtés qui compriment l'angle S, est le même pour le segment PO de la base, et pour le segment correspondant *po* de la section. Désignons ce rapport par $\frac{a}{2}$, et appelons φ la perpendiculaire abaissée du point S sur PO; nous aurons, Pl. 42. Fig. 4.

$$\frac{\text{SPO}}{\text{SP} \times \text{SO}} = \frac{\frac{1}{2}\varphi \times \text{PO}}{\text{SP} \times \text{SO}} = \frac{a}{2} \; \ldots\ldots\ldots\ldots \; (d),$$

ou

$$\text{PO} = a\,\frac{\text{SP} \times \text{SO}}{\varphi}.$$

Il en sera de même pour tous les autres segmens PO′, QN, etc.; mais la perpendiculaire φ sera la même pour les quatre segmens PO, PO′, QO, QO′, dirigés suivant PQ, et les perpendiculaires π et ψ, abaissées du sommet du cône sur les droites QR et RP, appartiendront aussi aux quatre segmens dirigés suivant chacune de ces droites. Si donc on désigne par $\frac{b}{2}$, $\frac{c}{2}$, $\frac{d}{2}$, $\frac{a'}{2}$, $\frac{b'}{2}$, etc, les rapports analogues à celui que nous avons désigné par $\frac{a}{2}$ no us aurons, Pl. 42. Fig. 3.

$$\text{PO} \times \text{PO}' = a\,\frac{\text{SP} \times \text{SO}}{\varphi}\,b\,\frac{\text{SP} \times \text{SO}'}{\varphi};\ \text{PM}' \times \text{PM} = c\,\frac{\text{SP} \times \text{SM}'}{\varphi}\,d\,\frac{\text{SP} \times \text{SM}}{\varphi};$$

$$\text{QN} \times \text{QN}' = a'\,\frac{\text{SQ} \times \text{SN}}{\pi}\,b'\,\frac{\text{SQ} \times \text{SN}'}{\pi};\ \text{RN}' \times \text{RN} = c'\,\frac{\text{SR} \times \text{SN}'}{\pi}\,d'\,\frac{\text{SR} \times \text{SN}}{\pi};$$

$$\text{RM} \times \text{RM}' = a''\,\frac{\text{SR} \times \text{SM}}{\psi}\,b''\,\frac{\text{SR} \times \text{SM}'}{\psi};\ \text{QO}' \times \text{QO} = c''\,\frac{\text{SQ} \times \text{SO}'}{\psi}\,d''\,\frac{\text{SQ} \times \text{SO}}{\psi}.$$

Ce qui donnera pour le premier membre de la relation (*a*),

$$aa'a'' \times bb'b''\,\frac{\overline{\text{SP}}^2 \times \overline{\text{SQ}}^2 \times \overline{\text{SR}}^2}{\varphi^2\,\pi^2\,\psi^2}\,\text{SO} \times \text{SO}'.\,\text{SN} \times \text{SN}'.\,\text{SM} \times \text{SM}',$$

et pour le second,

$$cc'c'' \times dd'd''\,\frac{\overline{\text{SP}}^2 \times \overline{\text{SR}}^2 \times \overline{\text{SQ}}^2}{\varphi^2\,\pi^2\,\psi^2}\,\text{SM}' \times \text{SM}.\,\text{SN}' \times \text{SN}.\,\text{SO}' \times \text{SO}:$$

en réduisant il viendra donc

$$aa'a'' \times bb'b'' = cc'c'' \times dd'd'' \; \ldots\ldots\ldots\ldots \; (e).$$

Relation qui est indépendante des grandeurs PO, PO′, SP, SO, φ, π, etc,

Pl. 42. Fig. 3. et qui ne contient absolument que les quantités numériques $a, a' \ldots b, b' \ldots$ etc. Or, d'après les relations (c) et (d), chacune de ces quantités, telle que a, est la même par rapport à la base, et par rapport à la section; donc la relation (e) est tout-à-la-fois équivalente à la relation (a) et à la relation (b). Donc enfin, il résulte de ce que la relation (a) est vraie pour la base, que la relation (b), qui se rapporte à la section, est vraie aussi (*).

577. Cette même relation (b) a lieu encore, comme on va le voir, lorsque le sommet du cône est à l'infini. En effet, dans ce cas la section n'est autre chose qu'une projection oblique ou orthogonale de la base, et les grandeurs qui sont sur une même droite PQ, QR ou RP, sont à leurs projections dans un rapport constant α, β, γ, ce qui donne,

$$\begin{aligned} PO \times PO' &= \alpha^2 .\ po \times po'; \quad QO' \times QO = \alpha^2 .\ qo' \times qo; \\ QN \times QN' &= \beta^2 .\ qn \times qn'; \quad RN' \times RN = \beta^2 .\ rn' \times rn; \\ RM \times RM' &= \gamma^2 .\ rm \times rm'; \quad PM' \times PM = \gamma^2 .\ pm' \times pm, \end{aligned}$$

et par conséquent,

$$\alpha^2\beta^2\gamma^2 .\ po \times po' .\ qn \times qn' .\ rm \times rm = \alpha^2\beta^2\gamma^2 .\ pm' \times pm .\ rn' \times rn .\ qo' \times qo,$$

ou, en retranchant le facteur commun $\alpha^2\beta^2\gamma^2$, la relation (b) elle-même.

Fig. 6, 7 et 8. 578. Cela posé, les trois droites pq, qr, rp, n'étant assujetties à aucune autre condition que d'être des sécantes de la section, supposons que les Fig. 9, 10 et 11. deux sommets p et q appartiennent à un diamètre oo' de cette section, et que le troisième sommet s'éloigne à l'infini sur le conjugué de oo'. Soit que ce diamètre conjugué se trouve à une distance finie (*fig.* 9 et *fig.* 10), soit qu'il se trouve lui-même à l'infini (*fig.* 11), les droites $m'm$, $n'n$, concourantes au troisième sommet, seront des parallèles au diamètre conjugué à oo'; donc on aura (551, 559 et 568)

$$pm = pm' \text{ et } qn = qn'.$$

Ce qui réduira la relation (b) à celle-ci :

$$po \times po' .\ \overline{qn}^2 .\ rm \times rm' = \overline{pm}^2 .\ rn' \times rn .\ qo' \times qo,$$

ou

$$\frac{\overline{pm}^2}{po \times po'} \times \frac{rn' \times rn}{rm \times rm'} = \frac{\overline{qn}^2}{qo' \times qo} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (f).$$

Le troisième sommet étant à l'infini, il faut, pour faire usage de cette

(*) Voyez le *Traité des propriétés projectives*, page 6.

relation, voir ce que devient le facteur Pl. 42. Fig. 9, 10 et 11.

$$\frac{rn' \times rn}{rm \times rm'}$$

579. Le plan mené par le sommet S du cône (*fig.* 5), et par celle $m'pm$ des deux cordes $m'pm$, nqn', qui se trouve la plus grande, passera par la droite PR (*fig.* 3 et *fig.* 5) de la base, droite sur laquelle sont les points M′ et M, correspondans de m' et m, et le troisième sommet, que nous désignons par la lettre r, étant à l'infini, son correspondant R sera sur une droite SR, menée par le sommet S du cône, parallèlement à $m'm$. Par le point P, menons la droite xy parallèle à $m'm$; les triangles semblables SMR, PMx, nous donneront Fig. 3, 5, 9, 10 et 11.

$$\mathrm{SR} : \mathrm{P}x :: \mathrm{RM} : \mathrm{PM}.$$

De même les triangles semblables M′SR, MyP, nous donneront

$$\mathrm{SR} : \mathrm{P}y :: \mathrm{RM'} : \mathrm{PM'}.$$

Et comme $pm' = pm$, on a $\mathrm{P}x = \mathrm{P}y$; d'où il suit que les premiers rapports des deux proportions précédentes sont identiques, ce qui donne

$$\mathrm{RM} : \mathrm{PM} :: \mathrm{RM'} : \mathrm{PM'},$$

ou

$$\frac{\mathrm{RM}}{\mathrm{RM'}} = \frac{\mathrm{PM}}{\mathrm{PM'}}.$$

Égalité qui aura lieu entre les grandeurs $m'\pi$ et $\pi\mu$, $m'\pi'$ et $\pi\mu'$, pour toute ligne droite m'R′, m'R″, menée par le point M′ et rencontrant les trois droites Sm', Sp, Sm. Or, supposons que la ligne droite m'R′ coupe successivement SR′ en des points R′, R″, etc, de plus en plus éloignés, et qu'enfin cette droite m'R′ prenne la position $m'm$, pour laquelle le point R′, passé en r, est supposé à l'infini; la relation précédente deviendra

$$\frac{rm}{rm'} = \frac{pm'}{pm'} = 1.$$

Ce qui montre *qu'un point r étant à l'infini sur une droite m′m, les distances infinies de ce point à deux points m′ et m de la même droite, quoiqu'elles aient une différence finie m′m, sont cependant rigoureusement égales*, puisque leur rapport est l'unité (*).

(*) Voyez le *Traité des propriétés projectives*, page 15.

Pl. 42. Fig. 5. 580. D'après cela, on voit que la quantité

$$\frac{rn' \times rn}{rm \times rm'}$$

sera aussi égale à l'unité, car les deux infinis rm, rm', qui diffèrent de la longueur mm', étant égaux, les infinis rn, rn', qui ne diffèrent que de la longueur nn', moindre que mm' (579), seront non-seulement égaux entre eux, mais égaux aux deux premiers.

Donc la relation (f) se réduit à

$$\frac{\overline{pm}^2}{po \times po'} = \frac{\overline{qn}^2}{qo \times qo'};$$

d'où résulte ce théorème important : *Que dans toute section plane conique ou cylindrique, les quarrés des ordonnées parallèles à un diamètre sont entre eux comme les rectangles des segmens correspondans formés sur son conjugué* (584).

Les axes n'étant autre chose que des diamètres conjugués, ce même théorème a donc lieu pour les axes. Il va nous servir à démontrer l'identité de la section fermée avec l'ellipse, de la section à deux branches avec l'hyperbole, de la section ouverte avec la parabole. Pour chaque section nous supposerons que cette identité ait lieu, nous construirons les foyers, et nous ferons voir qu'effectivement la section peut être engendrée au moyen d'un fil attaché à ces foyers (855, 861 et 867).

Pl. 43. Fig. 5. 581. Soit A'B'AB une section fermée, AA' et BB' ses axes, on sait (858) que si cette section est une ellipse, les petits arcs Fg, F'g', décrits du point B comme centre, avec un rayon égal à CA, couperont le grand axe A'A aux foyers F et F' de la courbe.

Or, on aura, par le théorème du n° 580,

$$\frac{\overline{PM}^2}{PA' \times PA} = \frac{\overline{CB}^2}{CA' \times CA} = \frac{\overline{CB}^2}{\overline{CA}^2}.$$

Et comme $PA' \times PA = (CA + CP)(CA - CP) = \overline{CA}^2 - \overline{CP}^2$, il vient

$$\overline{PM}^2 = \frac{\overline{CB}^2}{\overline{CA}^2}(\overline{CA}^2 - \overline{CP}^2);$$

ou

$$\overline{PM}^2 = \overline{CB}^2 - \frac{\overline{CP}^2}{\overline{CA}^2}\cdot\overline{CB}^2.$$

Mais Pl. 43. Fig. 5.

$$\overline{MF}^2 = \overline{PM}^2 + \overline{PF}^2,$$
$$PF = CF - CP,$$

et

$$\overline{PF}^2 = \overline{CF}^2 + \overline{CP}^2 - 2CF \times CP.$$

Donc

$$\overline{MF}^2 = \overline{CB}^2 - \frac{\overline{CP}^2}{\overline{CA}^2}\cdot\overline{CB}^2 + \overline{CF}^2 + \overline{CP}^2 - 2CF \times CP,$$

ou

$$\overline{MF}^2 = \overline{CB}^2 + \overline{CF}^2 + \frac{\overline{CP}^2}{\overline{CA}^2}\left(\overline{CA}^2 - \overline{CB}^2\right) - 2CF \times CP,$$

ou, à cause de $\overline{CB}^2 + \overline{CF}^2 = \overline{BF}^2 = \overline{CA}^2$, et de $\overline{CA}^2 - \overline{CB}^2 = \overline{BF}^2 - \overline{CB}^2 = \overline{CF}^2$,

$$\overline{MF}^2 = \overline{CA}^2 + \frac{\overline{CP}^2 \times \overline{CF}^2}{\overline{CA}^2} - 2CF \times CP.$$

Et attendu que la quatrième proportionnelle $\frac{CP \times CF}{CA}$, donnée par cette proportion, $CA : CF :: CP : x$, est plus petite que CP, et par conséquent plus petite que CA, on a

$$\overline{MF}^2 = \left(CA - \frac{CP \times CF}{CA}\right)^2,$$

ou

$$MF = CA - \frac{CP \times CF}{CA}.$$

On trouvera, en suivant absolument la même marche,

$$\overline{MF'}^2 = \overline{CA}^2 + \frac{\overline{CP}^2 \times \overline{CF}^2}{\overline{CA}^2} + 2CF \times CP,$$

ou

$$MF' = CA + \frac{CP \times CF}{CA}.$$

On aura donc

$$MF + MF' = 2AC = AA'.$$

D'où l'on voit que la section fermée du cône et du cylindre est telle qu'en prenant les deux points F et F' pour foyers, la somme des rayons vecteurs MF, MF', d'un point quelconque M, est égale au grand axe AA' : ce qui prouve que cette section est une ellipse (855).

Pl. 44. Fig. 3. 582. Pour la section à deux branches dont AA′ est l'axe réel, on aura (580)

$$\frac{\overline{PM}^2}{PA' \times PA} = \frac{\overline{pm}^2}{pA' \times pA}.$$

Du point p comme centre, avec pA comme rayon, décrivons le demi-cercle Agk; puis, sur A′k comme diamètre, construisons le demi-cercle A′hk, et prolongeons l'ordonnée pm jusqu'au point h, où elle coupe ce dernier demi-cercle : nous aurons

$$\overline{ph}^2 = pA' \times pk = pA' \times pA,$$

et conséquemment,

$$\overline{PM}^2 = \frac{\overline{pm}^2}{\overline{ph}^2} (PA' \times PA).$$

Et comme on a PA′ × PA = (CP + CA) (CP — CA); il s'ensuivra

$$\overline{PM}^2 = \frac{\overline{pm}^2}{\overline{ph}^2} (\overline{CP}^2 - \overline{CA}^2).$$

Portons pm et ph en Cm' et Ch'; joignons les points h' et A par la droite h'A; menons $m'b$ parallèle à h'A, et prenons CB = Cb, CB′ = Cb. Les triangles semblables Ch'A, C$m'b$, donneront

$$\overline{Cm'}^2 : \overline{Ch'}^2 \text{ ou } \overline{pm}^2 : \overline{ph}^2 :: \overline{Cb}^2 \text{ ou } \overline{CB}^2 : \overline{CA}^2;$$

d'où l'on tire

$$\frac{\overline{pm}^2}{\overline{ph}^2} = \frac{\overline{CB}^2}{\overline{CA}^2}.$$

On aura donc

$$\overline{PM}^2 = \frac{\overline{CB}^2}{\overline{CA}^2} (\overline{CP}^2 - \overline{CA}^2) = \frac{\overline{CP}^2}{\overline{CA}^2} \overline{CB}^2 - \overline{CB}^2.$$

Maintenant, supposons que A′A et B′B soient les deux axes d'une hyperbole; pour avoir ses foyers F et F′ (864) portons la distance A′B de C en F et de C en F′, et nous allons voir que cette hyperbole et la section qui nous occupe sont deux courbes identiques.

583. Pour le prouver on remarquera que

$$\overline{MF}^2 = \overline{PM}^2 + \overline{PF}^2;$$

que Pl. 44. Fig. 3.

$$PF = CP - CF:$$

ce qui donne

$$\overline{PF}^2 = \overline{CP}^2 + \overline{CF}^2 - 2CP \times CF;$$

et par suite

$$\overline{MF}^2 = \frac{\overline{CP}^2}{\overline{CA}^2}\,\overline{CB}^2 - \overline{CB}^2 + \overline{CP}^2 + \overline{CF}^2 - 2CP \times CF,$$

ou

$$\overline{MF}^2 = \overline{CF}^2 - \overline{CB}^2 + \frac{\overline{CP}^2}{\overline{CA}^2}\left(\overline{CB}^2 + \overline{CA}^2\right) - 2CP \times CF.$$

Mais

$$\overline{CF}^2 - \overline{CB}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{CB}^2 = \overline{CA}^2,$$

et

$$\overline{CB}^2 + \overline{CA}^2 = \overline{CF}^2;$$

donc

$$\overline{MF}^2 = \overline{CA}^2 + \frac{\overline{CP}^2 \times \overline{CF}^2}{\overline{CA}^2} - 2CP \times CF.$$

Et comme la quatrième proportionnelle $\frac{CP \times CF}{CA}$, donnée par la proportion $CA : CF :: CP : x$, est plus grande que CA, on aura

$$\overline{MF}^2 = \left(\frac{CP \times CF}{CA} - CA\right)^2,$$

ou

$$MF = \frac{CP \times CF}{CA} - CA.$$

On trouvera, en suivant la même marche,

$$MF' = \frac{CP \times CF}{CA} + CA;$$

d'où résultera

$$MF' - MF = 2CA = AA'.$$

Ce qui montre que la différence des distances d'un point quelconque M, de la section, aux points F' et F est constante et égale à l'axe réel : donc, etc. (861).

584. Passons au cas de la section ouverte. A*h* étant un diamètre ; PM et *pm* étant deux ordonnées quelconques parallèles à la tangente en A, les segmens correspondans seront d'une part PA et *p*A, d'autre part les Pl. 45. Fig. 7.

Pl. 45. Fig. 7. distances infinies des points P et p à l'infini au-delà de h. Nommons ces distances D et d : on sait (579) que leur différence Pp étant une quantité finie, elles seront parfaitement égales. D'après cela, le théorème du n° 580 donnant

$$\frac{\overline{PM}^2}{AP \times D} = \frac{\overline{pm}^2}{Ap \times d},$$

à cause de $D = d$, on aura

$$\frac{\overline{PM}^2}{AP} = \frac{\overline{pm}^2}{Ap};$$

ce qui nous apprend que, pour la section ouverte, le théorème qui vient d'être cité se réduit à celui-ci : *Les carrés des ordonnées parallèles aux cordes conjuguées à un diamètre* Ah, *sont entre eux comme les abscisses correspondantes, comptées à partir de l'extrémité* A *de ce diamètre.*

585. Cela posé, supposons que la droite Ah, au lieu d'être un simple diamètre, soit l'axe de la section : le point A sera son sommet. Par ce point et par l'extrémité m de l'ordonnée quelconque pm, faisons passer le demi-cercle Amh, dont le centre est en k sur Ah. Nous aurons

$$\overline{pm}^2 = Ap \times ph;$$

ce qui donnera

$$\overline{PM}^2 = \frac{Ap \times ph}{Ap} AP = ph \times AP,$$

ou, en prenant la distance AF égale au quart de ph;

$$\overline{PM}^2 = 4AF \times AP.$$

Relation qui nous apprend que si la section était une parabole, la double ordonnée en F serait quadruple de la distance AF, et que, conséquemment, cette double ordonnée serait le paramètre, et F le foyer (871).

586. Raisonnons dans cette supposition, et nous allons voir qu'elle est vraie.

En effet, portons AF de A en D; élevons par le point D la droite DB perpendiculaire à Ah, et menons MF. Nous aurons

$$\overline{MF}^2 = \overline{PM}^2 + \overline{PF}^2,$$

ou

$$\overline{MF}^2 = 4AF \times AP + (AP - AF)^2,$$

ou

$$\overline{MF}^2 = 4AF \times AP + \overline{AP}^2 + \overline{AF}^2 - 2AP \times AF,$$ Pl. 45. Fig. 7.

ou

$$\overline{MF}^2 = \overline{AP}^2 + \overline{AF}^2 + 2AF \times AP = (AP + AF)^2,$$

ou enfin

$$MF = AP + AF.$$

Mais $AP + AF = AP + AD = PD$; donc

$$MF = PD.$$

C'est-à-dire que la courbe a tous ses points à la même distance du point F et de la droite DB : cette courbe est donc une parabole (867).

587. Quant aux sections coniques et cylindriques singulières, qui se composent d'une ou de plusieurs lignes droites, elles sont évidemment identiques avec les ellipses, les hyperboles et les paraboles singulières qui se composent aussi de lignes droites, et dont il est question Note Ire (885—888) (*).

D'après cela, toutes les sections planes du cône à base circulaire [cône dont le cylindre de même base n'est qu'un cas particulier (606)] sont des lignes elliptiques, hyperboliques et paraboliques. On verra plus loin (607) que, réciproquement, toutes les ellipses, toutes les hyperboles, et toutes les paraboles, sont des sections de plans et de cônes à bases circulaires.

588. La relation

$$po \times po'.\ qn \times qn'.\ rm \times rm' = pm' \times pm.\ rn' \times rn.\ qo' \times qo,$$

caractérisant, comme on vient de le voir, l'ellipse, l'hyperbole et la parabole; de plus, les cônes et cylindres, qui ont pour bases des courbes jouissant de la propriété exprimée par cette relation, ne pouvant être coupés par des plans que suivant des courbes qui jouissent de cette même propriété, il s'ensuit que tous les cônes qui ont pour bases des ellipses, des hyperboles et des paraboles, ne peuvent être coupés par un plan que suivant une section elliptique, hyperbolique ou parabolique.

589. Il suit de là, 1°. que toutes les projections obliques et orthogo-

(*) On remarquera peut-être que parmi les variétés d'hyperboles, celle qui se compose de deux parallèles éloignées d'une distance finie (887), n'a point été retrouvée (526 et 527) parmi les sections coniques : elle existe sur le cylindre à base hyperbolique (607).

nales d'une ellipse, d'une hyperbole ou d'une parabole, sont d'autres ellipses, d'autres hyperboles ou d'autres paraboles; 2°. que les courbes examinées dans la Note première forment bien un seul et même genre de lignes (*).

Pl. 43. Fig. 4. 590. DES PLANS DIAMÉTRAUX DES CÔNES. Le cercle quelconque TURV étant la base d'un cône, dont le sommet (S, S') ait été choisi arbitrairement, on sait (546—550, 555 et 556, 564—567) que le plan mené par le sommet et par la polaire TR d'un point O, divise toutes les cordes du cône, telles que (*mn*, BD), parallèles à la droite (SO, S'o), en deux parties égales. Un plan qui jouit de la propriété de couper ainsi par moitiés tout un système de cordes parallèles, est ce qu'on nomme un *plan diamétral*.

Il est clair que tout plan diamétral passe par le sommet (S, S').

Pl. 42. Fig. 1. 591. Lorsque les cordes correspondantes à un plan diamétral STR sont perpendiculaires à ce plan, il prend le nom de *plan diamétral orthogonal*. On voit que, dans ce cas, le pôle O, correspondant au plan STR, est tel que ce plan soit perpendiculaire à la droite SO.

Pl. 43. Fig. 4 592. O, O' et O", étant donc trois pôles conjugués (543) de la base TURV, le plan mené par le sommet, et par O"O', sera le plan diamétral correspondant aux cordes parallèles à la droite menée par le sommet et par le pôle O. De même, le plan mené par le sommet, et par la droite O"O, sera le plan diamétral correspondant aux cordes parallèles à la droite menée par le sommet et par le pôle O'. Enfin, le plan mené par le sommet, et par la droite O'O, sera pareillement le plan diamétral correspondant aux cordes qui ont le point O" pour pôle (590).

C'est-à-dire que trois pôles conjugués O, O' et O", déterminent trois plans diamétraux passant par les droites O'O", O"O, OO', qui joignent ces trois pôles, et que les trois systèmes de cordes, coupées en parties égales par ces trois plans, sont respectivement parallèles aux droites menées par le sommet, et par les points O, O', O", ou, ce qui revient au même, que ces cordes sont respectivement parallèles aux intersections de ces trois plans.

On donne à ces plans le nom de *plans diamétraux conjugués*.

593. Lorsque trois plans diamétraux conjugués sont tous trois à la fois des plans diamétraux orthogonaux, ils prennent la dénomination de *plans diamétraux principaux*, ou simplement celle de *plans principaux*.

Les trois droites suivant lesquelles se coupent les plans principaux se nomment les *axes* du cône. Parmi ces axes, celui qui passe par le pôle O" est dans l'intérieur de la surface, il se nomme l'*axe réel*; les deux autres sont au-dehors, on les nomme *axes imaginaires*.

Pl. 36. Fig. 4. 594. Si le cercle AB, dont le plan est supposé perpendiculaire au plan SAB de la figure (530), sert de base à un cône dont le sommet soit en S, le plan SAB, comme nous l'avons dit précédemment (529), divisera le cône en deux parties symétriques : il coupera par con-

(*) Dans l'Analyse appliquée on les nomme *lignes du second degré* ou *lignes du second ordre* (169 note). Le nom de sections coniques est plus particulier à la Géométrie.

séquent en parties égales toutes les cordes qui lui seront perpendiculaires. Il est clair qu'il en sera de même du plan SQ, tel que les angles ASQ, QSB, soient égaux; ainsi que du plan RST, perpendiculaire à l'intersection de SAB et de SQ. D'où il suit que tout cône à base circulaire présente un système de plans principaux SAB, SQ, RST. Pl. 36 Fig. 4.

595. Il est aisé de prouver aussi qu'un tel cône n'a jamais qu'un seul système de ces plans. Pour cela, nous remarquerons d'abord que si ABD est la base circulaire d'un cône, et (S, S') son sommet, tout plan principal, dont la trace AB coupe la base, est tel que la droite menée par le sommet et par le pôle O de AB, lui soit perpendiculaire, en sorte que les angles de cette droite, et de celles qui passent par le sommet (S, S') et par les points A et B, sont des angles droits. Fig. 3.

Cela posé, soit x un point du cercle ABD, et supposons que ce point appartienne à un plan principal. Menons par le point x la trace xt du plan tangent au cône; et construisons la trace t, de la droite menée dans ce plan par le sommet (S, S'), perpendiculairement à celle qui joint les points (S, S') et x. S'il y a un plan diamétral orthogonal qui passe par le point x, le pôle des cordes conjuguées à ce plan sera le point t; donc si, par le point t, on mène la tangente tx' à la base, pour déterminer le point de contact x', la droite xx' sera la trace du plan orthogonal auquel le point x est supposé appartenir, ce qui exige que les droites menées par le sommet (S, S'), et par les points t et x', fassent entre elles un angle droit, ou, ce qui revient au même, ce qui exige que le point t soit dans le plan CS. De là il suit que le point x ne peut avoir que quatre positions sur le cercle ABD, savoir : il peut être en Z et en Z' sur la droite CS, et il peut être en z et en z' dans le plan principal $S'k$. Mais ces quatre positions appartiennent aux plans principaux examinés tout à l'heure (594); donc, etc.

Si le cône pouvait être coupé suivant un cercle par d'autres plans que les plans parallèles et antiparallèles à la base ABD, ce cône aurait plusieurs systèmes de plans antiparallèles, et chacun de ces systèmes donnerait un système de plans principaux. Or, puisqu'il n'y a qu'un système de ces derniers, il n'y a aussi qu'un seul système de sections antiparallèles : donc il n'y a pas d'autres plans que les plans parallèles et antiparallèles à la base qui puissent couper le cône suivant des cercles.

597. Nous ferons remarquer en passant que les cercles des sections antiparallèles étant distribués sur les droites SC, SC', menées par le sommet S, et par les centres C et C' de deux sections A'B', *ab*, l'axe réel SQ du cône n'en peut contenir aucun, sauf ceux des deux cercles qui se confondent avec le sommet. Fig. 4.

598. Soit TURV une section conique quelconque, et soit S un point pris arbitrairement dans l'espace pour sommet d'un cône dont TURV soit la base. O étant un point quelconque du plan TURV, menons par ce point les tangentes OT, OR, à la base; puis menons la corde TR, que nous appellerons la *polaire* du pôle O : car les dénominations de polaires et de pôles s'appliquent à toutes les courbes planes, de la même manière qu'au cercle. Le plan STR, mené par le sommet S et par la polaire TR, coupera en parties égales toutes les cordes dont le pôle est en O : c'est-à-dire que le plan STR sera le plan diamétral correspondant à ces cordes. En effet, imaginons que le cône soit coupé par des plans parallèles à SO; chaque section aura un diamètre dans le plan STR; les tangentes aux extrémités de ce diamètre concourront à l'infini au point où la droite Pl. 46. Fig. 2.

Pl. 46. Fig. 2. SO percera le plan de cette section, d'où l'on voit que les cordes parallèles à SO seront les cordes conjuguées à ce diamètre ; donc toutes les cordes parallèles à SO seront coupées en parties égales par le plan STR.

Si maintenant on prend sur TR un pôle quelconque O'; si l'on détermine la polaire VU, et si l'on coupe le cône par un plan parallèle au plan OSO', la section aura un diamètre dans le plan SVU; elle en aura un autre dans le plan STR ; les tangentes aux extrémités du premier seront parallèles au second ; donc ils seront deux diamètres conjugués; donc les tangentes aux extrémités du second seront parallèles au premier ; donc la droite VU prolongée passera par le pôle O : donc la base TURV, qui est une section conique quelconque, jouit de toutes les propriétés précédemment démontrées (543) pour les cordes polaires du cercle.

599. Il s'ensuit que les trois pôles conjugués O, O' et O", d'une section conique, déterminent trois plans diamétraux conjugués OSO", O"SO', O'SO, du cône auquel appartient cette section.

600. Supposons la droite SO perpendiculaire au plan STR, ou, ce qui est la même chose (591), supposons que ce plan soit orthogonal, et faisons mouvoir le pôle O' sur la droite indéfinie TR : le plan diamétral SVU, passant par le pôle O, et la droite SO", intersection de SVU et de STR, se mouvront en même temps que le pôle O'. Concevons que ce pôle soit à l'infini vers x ou à l'infini vers x' : à ces deux positions il ne correspondra qu'une seule position S*vu* du plan SVU; la droite SO" se trouvera en S*o*", et la droite SO', devenue parallèle à TR, coïncidera avec la partie S*o*', ou avec la partie S*o*, d'une droite *oo*' menée par le sommet S parallèlement à TR. La droite SO', dans ces deux positions, fera donc avec SO" des angles *o*'SO", O"S*o*, supplémens l'un de l'autre : donc un de ces angles sera obtus. Si le point mobile O' passe de l'infini vers x à l'infini vers x', en occupant successivement toutes les positions intermédiaires, l'angle O'SO" variera graduellement : or le point O' étant arrivé en R ou en T, le plan SVU sera en SRO ou STO, et la droite SO' en SR ou en ST; donc l'angle O'SO" sera nul. Donc le plus grand des deux angles *o*'SO", O"S*o*, d'obtus qu'il était, deviendra nul, et ensuite égal au plus petit : donc il y aura une position du point O' pour laquelle ce plus grand angle sera droit. Dans cette position, que nous indiquerons au moyen du point O' de la figure, la droite SO' qui, par cela seul que le plan STR est orthogonal, se trouve perpendiculaire à SO, sera donc aussi perpendiculaire à SO" : donc elle sera perpendiculaire au plan SVU. Donc enfin le plan diamétral SVU sera orthogonal, ainsi que STR, en sorte qu'en faisant passer par les deux droites SO', SO, perpendiculaires à ces plans, un troisième plan SOO', on aura les trois plans diamétraux principaux STR, SVU, SOO', du cône donné STURV.

601. On voit d'après cela que si nous pouvons prouver qu'un cône dont la base est une section conique, a toujours un plan orthogonal STR, il s'ensuivra qu'il a des plans principaux.

Supposons que ce cône soit coupé par un plan parallèle à l'un de ses plans tangens; la
Pl. 45. section sera ouverte, et ce sera une parabole TURV. Prenons cette parabole pour base;
Fig. 6. prenons son plan pour plan horizontal de projection, et soit S la projection du sommet sur ce plan. Par le point S abaissons la droite S*n* normalement à la parabole; soit *pq* la tangente en *n*, et soit S' la projection verticale du sommet sur un plan BD perpendiculaire à *pq*. Les angles RSO, TSO (S désignant le sommet et non sa projection), situés dans les

plans tangens ORS, OTS, devant être tous deux droits pour un plan orthogonal STR, il va être facile de construire le pôle O correspondant à un tel plan. Pl. 45. Fig. 6.

Par un point quelconque m, de la partie nRPV de la base TURV, menons une tangente quelconque mk, puis rabattons le plan tangent Smk. Le sommet S viendra en s; la droite Sm viendra en sm, et si par le point s ou mène sk perpendiculaire à sm, le point k, et un nombre suffisant d'autres points, déterminés de la même manière, donneront une courbe p'OO$'r$, sur laquelle devra se trouver le pôle cherché O, si ce pôle existe réellement.

Des constructions analogues, faites pour l'arc nUTQ de TURV, donneront une ligne vOO$'q'$, lieu des points tels que k, sur laquelle devra aussi se trouver le pôle O.

Ces deux lignes p'OO$'r$, vOO$'q'$, seront deux branches d'une même courbe, jouissant de la propriété que si par un de ses points k on mène un plan tangent au cône, l'angle de l'élément de contact Sm, et de la droite Sk, sera un angle droit. Il est aisé de voir que ces deux branches seront conjuguées entre elles par les asymptotes menées par le point S, l'une xy, parallèlement à pq, l'autre $v'r'$, perpendiculairement à l'axe AX de TURV.

602. Il s'agit maintenant de démontrer que les deux lignes p'OO$'r$, vOO$'q'$, se rencontreront toujours. Pour cela, nous allons faire voir que la branche p'OO$'r$, correspondante à l'arc nRPV de la base, situé du côté S de l'axe AX de cette base, coupe cet axe en un point t, tel que si l'on mène les tangentes tm, tm', la dernière tm' coupera l'autre branche vOO$'q'$ en un point i, placé au-delà du point t de manière qu'on ait

$$m'i > mt.$$

La branche vOO$'q'$ allant du point i toucher à l'infini l'asymptote Sy, tandis que la branche p'OO$'r$ va du point t à l'infini toucher l'asymptote Sr', il s'ensuivra que ces branches se coupent en un point O$'$ situé entre t et i, d'une part, et l'infini vers y et r', d'autre part. De même le point i étant à droite de t, il s'ensuivra que la ligne iOv allant joindre l'asymptote Sv' de la gauche, tandis que la ligne tOp', qui part de la gauche, va joindre l'asymptote Sx de la droite, ces deux lignes iOv, tOp', se coupent en un point O. Il sera donc prouvé que les deux branches de courbe vOO$'q'$, p'OO$'r$, se coupent en deux points O et O$'$. Et il faut bien remarquer que la démonstration ne sera pas particulière au cas de la figure, car de quelque façon que soit placé le sommet par rapport à la base TURV, les deux asymptotes se croiseront par le point S, et seront dirigées, comme nous l'avons dit plus haut, l'une perpendiculairement à AX, l'autre parallèlement à la tangente pq, menée par le pied n de la normale Sn, ce qui, avec les positions relatives des points t et i, établit toutes les circonstances sur lesquelles cette démonstration se trouve fondée.

Cela posé, transportons les points m et m', S, t et i, à la figure 1re, afin d'éviter la confusion de lignes que nous donnerait la figure 6.

L'angle des droites menées du sommet aux points m et t étant droit, les trois points m, S et t seront sur un demi-cercle dont mt sera le diamètre; si donc nous rabattons le plan de ces trois points sur le plan horizontal, mht sera ce demi-cercle, et la perpendiculaire Sh, abaissée du point S sur mt, donnera le rabattement h du sommet. Si maintenant on décrit sur nh, comme diamètre, le demi-cercle nxh, et qu'on prenne la corde nx égale à Sn, il est clair que la corde xh sera la hauteur du sommet au-dessus du plan horizontal; Fig. 1.

Pl. 45. Fig. 1. d'où l'on voit que la seule disposition des points m, m', S et t, suppose le sommet du cône entièrement déterminé.

Menons par le point m la droite mQ perpendiculaire à mm', et prenons le plan mQ pour plan vertical. Si nous menons la verticale (S, aS'), et que nous prenions $aS' = xh$, le point (S, S') sera le sommet du cône.

La droite AX étant perpendiculaire à mm' et passant par le point t, nous prendrons sur la droite aS prolongée $es = e$S; et comme il s'agit de démontrer que les angles situés dans l'espace mSt, m'Si, étant droits, $m'i$ est plus grand que mt, il reviendra au même de substituer l'angle m'St à l'angle mSt, en remplaçant le point (S, S') par (s, S'), et de faire voir que $m'i$ est plus grand que $m't$.

Étant donc connus les points (m', m), (s, S'), (S, S'); et les droites menées par les points (s, S') et t, (S, S') et i, étant respectivement perpendiculaires à ($m's$, mS') et à (m'S, mS'), le théorème à démontrer sera que $m'i$ excède $m't$, ou bien que si l'on mène par les points (s, S'), (S, S'), des plans respectivement perpendiculaires à ($m's$, mS'), (m'S, mS'), ils couperont la droite $m't$ en deux points t et i, tels que le point i se trouvant correspondre au plan mené par (S, S') on ait $m'i > m't$.

Ces plans, respectivement perpendiculaires à ($m's$, mS'), (m'S, mS'), passeront par les horizontales (sr, S'r'), (Sr, S'r'), dont les projections sr, Sr, sont perpendiculaires à $m's$ et m'S; or ces horizontales perceront le plan vertical au même point (r, r'), car les angles $m'sr$, m'Sr, $m'mr$, étant tous droits, les points m', s, S, m et r, seront sur un même demi-cercle sous-tendu par le diamètre $m'r$, à l'extrémité r duquel se couperont les trois droites sr, Sr et Qmr. Si donc on mène par le point r' la droite $r'f$, perpendiculaire à mS', cette droite sera la trace verticale commune aux deux plans perpendiculaires en question; et leurs traces horizontales seront les droites fb, fd, respectivement perpendiculaires à $m's$ et à m'S. Les angles situés dans l'espace $m'st$, m'Si, étant droits, ces droites couperont $m't$, la première au point t déjà connu, la seconde au point i.

Il suit de là qu'étant donnés les points m', m, s, S et t, il ne s'agira, pour avoir le point i, que de mener par le point t la droite tf perpendiculaire à $m's$, puis, par le point f, où tf rencontrera la droite mQ, perpendiculaire à $m'm$, d'élever une nouvelle droite fd, perpendiculaire à m'S, et cette droite coupera $m't$ au point cherché i.

603. Sachant construire le point i d'une manière aussi simple, il sera facile de voir que $m'i$ est toujours plus grand que $m't$. Distinguons plusieurs cas.

1er *Cas*. Quel que soit l'angle mtm', supposons le point S dans l'intérieur de cet angle, et du côté de $m'm$ où se trouve le point t. La ligne tf étant menée par le point t perpendiculairement à $m's$, et la droite $m's$ étant nécessairement dans l'angle S$m't$, puisque les points S et s sont placés symétriquement par rapport à AX, on aura évidemment $m'i > m't$.

Fig. 2. 2e *Cas*. L'angle mtm' étant toujours arbitraire, supposons le point S dans cet angle, à l'opposé du sommet par rapport à mm'. Le point projeté en S devant se rabattre sur le demi-cercle $mzyt$, dont mt est le diamètre, il faudra que la projection S de ce point soit située dans ce demi-cercle, ce qui exigera que l'angle Smt, ou son égal $sm't$, soit au plus un angle droit. Il s'ensuit que la droite tf, perpendiculaire à $m's$, coupera la ligne de terre mQ en un point f, qui sera à droite du point d'intersection k de $m't$ et de mQ. Or, le point i étant sur la perpendiculaire à m'S, menée par le point f, et cette perpendiculaire fd

étant évidemment au-delà de la portion de droite ft, par rapport au point m', on aura encore $m'i > m't$. Pl. 45. Fig. 2.

3° *Cas.* Supposons le point S situé au-dehors de l'angle quelconque mtm', du même côté de mm' que le sommet de cet angle. Le point S devant se trouver dans le demi-cercle $mzyt$, il faudra que l'angle $Smt = sm't$ soit au plus égal à un droit. La droite tf, perpendiculaire à $m's$, sera donc à gauche de $m't$; d'où l'on voit que le point d'intersection k de $m't$, et de la ligne de terre, sera situé à droite du point f. Mais puisque la ligne ft, perpendiculaire à $m's$, passe par le point t, la ligne fd qui donne le point i, et qui est perpendiculaire à m'S, sera évidemment au-delà du point t, par rapport au point m', ce qui donnera conséquemment $m'i > m't$. Fig. 5.

4° *Cas.* Après avoir supposé le point S en dedans de l'angle mtm', et successivement du côté t de mm' et du côté opposé, puis en dehors de cet angle et du côté de t, il ne nous reste à examiner que le cas où le point s serait au-dehors de l'angle mtm', et à l'opposé du sommet de cet angle par rapport à mm'. Ce cas ne peut exister, car le point S doït être situé en dedans du demi-cercle $mzyt$, et il serait au-dehors. Fig. 3.

Donc, dans tous les cas possibles, on a $m'i > m't$: ce qu'il fallait démontrer.

604. Les courbes auxiliaires $p'OO'r$, $rOO'q'$, se coupant en deux points O et O', il correspond à ces points deux plans orthogonaux STR, SVU, qui coupent la base TURV. Ces plans se coupent eux-mêmes suivant l'axe réel (SO", S'o"), et il en résulte que tout plan perpendiculaire à cet axe coupe le cône suivant une ellipse. En effet, l'axe des pôles d'une section perpendiculaire à (SO", S'o") est la droite que déterminent les points O et O', et ces points sont les pôles des diamètres conjugués rectangulaires de la section; or, supposons, 1°. qu'elle soit parabolique : les diamètres seraient des droites parallèles qui concourraient à l'infini avec l'élément de contact du cône et du plan tangent parallèle au plan coupant; celui des deux pôles O et O' qui correspondrait à ces diamètres serait donc sur cet élément, c'est-à-dire sur la ligne TURV; 2°. qu'elle soit hyperbolique : son axe réel serait une corde extérieure du cône; donc celui des deux pôles O et O' qui correspondrait à cet axe serait dans l'intérieur de la base. Mais les deux pôles O et O' ne sont ni sur TURV, ni en dedans de TURV; donc, etc. Fig. 6.

605. Maintenant il est facile de prouver qu'un tel cône peut toujours être coupé suivant un cercle. Pour cela prenons la verticale (C, CS) pour l'axe du cône : suivant ce qui vient d'être démontré, ce cône aura pour intersection avec le plan horizontal une courbe elliptique. Supposons que le petit axe AB de cette courbe soit dans le plan vertical, et soit CD, perpendiculaire à AB, son demi-grand axe. La demi-ellipse ADB formera la moitié de la base du cône; il sera aplati dans le sens du plan CD; le plan AB le coupera suivant les élémens SA, SB, et si nous portons CD en CD', la droite SD' sera, sur le plan vertical, le rabattement de la section CD autour de l'axe réel (C, CS). Pl. 44. Fig. 4.

Cela posé, prenons sur l'élément SB un point quelconque b, et nous allons faire voir qu'on peut mener par ce point une section circulaire. Par le point b menons une suite de plans, tels que bP, perpendiculaires au plan vertical, et opérons de la même manière sur chacun de ces plans. Déterminons le point c milieu de bP; imaginons que ce point soit le centre d'un demi-cercle situé dans le plan bP, et construisons le rabattement Pmb de ce demi-cercle: son ordonnée en e, dans le plan vertical CD, sera égale à em. Menons par le

30

Pl. 44. Fig. 4. point e l'horizontale en, et prenons $en = em$; il est clair que si le demi-cercle bP appartenait à la surface du cône, le point n, rabattement, autour de (C, CS), du point de ce demi-cercle projeté en e, se trouverait sur SD′ : donc la suite des points tels que n formera une courbe nxN, qui, si elle coupe SD′ en un point x, correspondant au point X de SC, déterminera une section circulaire bXQ.

Or, ab étant une horizontale, la courbe nxN passera par le point a, situé à droite de SD′, et lorsque le point e sera en E sur la droite bE parallèle à SA, le point x sera à l'infini, à gauche de SD′, sur l'horizontale EG, qui sera l'asymptote de la courbe : donc cette courbe anxN coupera toujours SD′. Donc, etc.

Donc tout cône qui a pour base une ellipse, une hyperbole ou une parabole, est un cône à base circulaire.

606. Si le sommet du cône était à l'infini, il y aurait à examiner plusieurs cas :

Premièrement, supposons qu'un cône présente une section elliptique, et que cette section demeure invariable pendant que le sommet s'éloigne à l'infini ; ce cône se changera en cylindre elliptique. Imaginons qu'un tel cylindre soit coupé par un plan perpendiculaire à sa direction ; la section sera une ellipse (581) : prenons le plan de cette ellipse pour plan horizontal de projection, et prenons pour plan vertical un plan mené par le petit axe de la section perpendiculairement au plan horizontal. Il est clair que le cylindre dont il s'agit se trouvera représenté, ainsi que le cône du n° précédent, par sa trace horizontale
Fig. 2. ABD, dont nous ne représentons que la partie vue, et par ses traces verticales Aa, Bb. Or, si d'un point quelconque (B, b), de l'élément Bb, comme centre, avec $bm = 2$CD, comme rayon, on décrit l'arc mQ, cet arc viendra couper l'élément Aa en un point Q, et il est évident que si l'on coupe le cylindre par le plan bQ, on aura pour section une ellipse dont les deux axes seront égaux à 2CD, c'est-à-dire une section circulaire.

Secondement, supposons que le cylindre soit hyperbolique ; coupons-le par un plan
Fig. 3. perpendiculaire à sa direction, et soit mAn... pA′q l'hyperbole qu'on obtiendra pour section. Concevons, par l'axe A′A, un plan vertical de projection, et imaginons qu'un cône dont mAn... pA′q soit la base ait son sommet sur la verticale C, correspondante au centre de cette base : si le sommet s'éloigne à l'infini, le cône en question deviendra le cylindre proposé. Mais l'axe réel de ce cône sera toujours parallèle au plan horizontal, et il est aisé de voir, 1°. que le sommet s'étant élevé à une certaine hauteur, le cône, quel qu'il fût d'abord, se trouvera ensuite aplati dans le sens du plan AA′ ; 2°. que les plans des sections circulaires couperont le plan de projection AA′ suivant des droites verticales ; 3° que les rayons de ces sections seront de plus en plus grands ; 4°. enfin, qu'ils seront infinis pour la position du sommet éloigné à l'infini, et qu'en conséquence les élémens du cylindre ne seront autre chose que les sections circulaires de ce cylindre.

Troisièmement, si l'on suppose que le cylindre soit parabolique, on sera conduit au même résultat que dans le cas précédent.

Il suit de là que tout cylindre à base elliptique, hyperbolique ou parabolique, n'est réellement qu'un cas particulier du cône à base circulaire, et qu'il peut être coupé par un plan suivant un cercle.

607. Le cylindre hyperbolique pouvant être coupé par un plan suivant des hyperboles composées, chacune, de deux droites parallèles éloignées d'une distance finie arbitraire,

on voit que toutes les variétés possibles d'ellipses, d'hyperboles et de paraboles (884—888), se trouvent sur les cônes et cylindres qui ont pour bases des cercles.

On remarquera de plus, d'après tout ce qui précède, qu'on peut trouver sur un cône quelconque à base circulaire, 1°. toutes les paraboles possibles, puisqu'on y trouve la droite perpendiculaire à l'axe de la parabole, et celle qui se confond avec cet axe (526), c'est-à-dire, la parabole la plus ouverte et celle qui est la plus alongée; 2°. toutes les ellipses possibles, car si l'on trace sur ce cône une suite de sections circulaires parallèles, et qu'on prenne sur ces sections des cordes égales à une ligne donnée, et perpendiculaires au plan principal (529), on pourra mener par ces cordes des sections elliptiques qui, ayant la ligne donnée pour petit axe, soient comprises entre le cercle, d'une part, et la section composée de deux droites parallèles, menée par la corde située à l'infini, d'autre part, c'est-à-dire toutes les ellipses d'un petit axe donné, et d'une excentricité variable depuis zéro jusqu'à l'infini; 3°. toutes les hyperboles dont les asymptotes comprendront un angle moindre que celui du cône. Mais on n'y trouvera pas les autres hyperboles. La seule surface conique pour laquelle l'angle au sommet serait infiniment près de deux droits, pourrait donc offrir toutes les sections coniques possibles : cette surface est un plan.

608. THÉORÈMES ET PROBLÈMES *sur les sections coniques.* Il n'y a peut-être pas de sujet qui ait plus exercé les savans que la théorie des sections coniques, aussi cette théorie comprend-elle un nombre immense de propriétés. Nous allons nous arrêter un moment à celles qui intéressent la Géométrie descriptive.

609. *Théorème* 1er. *Une ellipse* ABA'B', *ayant un de ses axes* AA' *égal au diamètre* AA' *d'un cercle* ARA'R', *les ordonnées* PM *et* Pm, *du cercle et de l'ellipse, correspondantes à une même abscisse* CP, *sont entre elles comme les axes de l'ellipse.* Pl. 46. Fig. 1.

Effectivement, on a pour le cercle

$$\overline{PM}^2 = \overline{CM}^2 - \overline{CP}^2 = \overline{CA}^2 - \overline{CP}^2,$$

et pour l'ellipse (581)

$$\overline{Pm}^2 = \frac{\overline{CB}^2}{\overline{CA}^2} (\overline{CA}^2 - \overline{CP}^2).$$

Ce qui donne

$$PM : Pm :: \sqrt{\overline{CA}^2 - \overline{CP}^2} : \frac{CB}{CA} \sqrt{\overline{CA}^2 - \overline{CP}^2},$$

ou, ce qu'il fallait démontrer,

$$PM : Pm :: CA : CB.$$

Pl. 46. Fig. 1. Il est évident que pour l'ellipse ADA'D', on aurait trouvé

PM : Pm' :: CA : CD.

610. *Théorème* 2. *L'ellipse* ABA'B' *ayant encore pour l'un de ses axes le diamètre* AA' *du cercle* ARA'R', *les tangentes* MT, mT, *aux points* M *et* m, *du cercle et de l'ellipse, correspondans à la même abcisse* CP, *couperont l'axe commun* AA' *en un même point* T.

Pour démontrer cette propriété, concevons que l'ellipse ABA'B', supposée horizontale, soit la base d'un cylindre vertical, et faisons tourner le cercle ARA'R' jusqu'à ce que le point R' soit sur l'élément du cylindre projeté en B'. Le plan mené par la position que le point R' aura prise, et par les points A et A', coupera le cylindre suivant une section dont AA' et R'R seront les axes; donc cette section sera circulaire. Donc par cela seul que, dans le mouvement du cercle ARA'R', le point R' sera venu s'appliquer sur le cylindre, ce cercle tout entier se trouvera compris dans la surface dont ABA'B' est la projection; donc le point M, dans sa nouvelle position, se projettera en *m* : donc le plan *m*T, tangent en *m* à cette surface, contiendra les tangentes en M et *m* au cercle et à l'ellipse. Mais ce plan coupe la droite AA', intersection du plan horizontal et de la section circulaire ARA'R', ramenée sur le cylindre, en un point T, qui appartient aux tangentes en question : donc, etc.

Si le diamètre AA', au lieu d'être le grand axe de l'ellipse donnée, était son petit axe, comme dans le cas de l'ellipse ADA'D', on concevrait que le cylindre vertical passât par le cercle ARA'R'; on ferait tourner l'ellipse ADA'D' autour de AA', jusqu'à ce que le point D' se projetât en R'; on remarquerait que dans cette position le plan mené par la droite AA', et par le point D' ramené au-dessus de R', coupe le cylindre suivant une ellipse dont les axes sont égaux à AA' et DD'; on en conclurait que, dans sa nouvelle position, cette ellipse coïncide avec le cylindre, etc., etc.

On appelle la droite PT, qui est sous la tangente *m*T ou MT ou *m'*T, la *soutangente* du point *m* ou M ou *m'*, et on énonce le théorème qui nous occupe, en disant que *le cercle* ARA'R' *et les ellipses* ABA'B', ADA'D', *ont, pour la même abscisse, une même soutangente.*

Fig. 3. 611. *Théorème* 3. CA *et* CB *étant les demi-axes d'une ellipse, toute droite* TM, *égale au demi-grand axe, qui s'appuiera d'un bout* M *sur cette ellipse, et de l'autre bout* T, *sur la direction* B'CB *du petit axe*,

aura au dehors de l'angle droit B'CA, *une partie* RM, *égale au demi-petit axe* CB, *ou, ce qui revient au même, en dedans de cet angle une partie* RT, *égale à l'excentricité.* Pl. 46. Fig. 3.

En effet, du point T comme centre, avec TM comme rayon, décrivons le cercle *a*M*b*, il aura pour diamètre le grand axe de l'ellipse, ce qui donnera (609)

$$DM : PM :: CA : CB ;$$

mais les triangles MPR, MDT, étant semblables, on a

$$DM : PM :: TM : RM :$$

d'où résulte

$$CA : CB :: TM = CA : RM :$$

ce qui exige qu'on ait CB = RM, ou la ligne RT égale à l'excentricité.

612. *Scholie.* Cette propriété fournit un procédé bien simple et bien commode pour décrire une ellipse. Le voici :

Étant données les directions MN, PQ, des axes, on prend un petit papier *abcd*, dont le côté *ab* soit une ligne droite, on marque sur le bord de ce papier trois points A, B, C, tels que la distance AB soit l'excentricité, AC le demi-grand axe, et BC, conséquemment, le demi-petit axe. Cela fait on donne au papier une suite de positions telles, que les points A et B, qui terminent l'excentricité, soient sur les lignes MN, PQ; pour chacune on marque la position correspondante du point C, et les positions successives de ce point décrivent l'ellipse dont MN et PQ sont les directions des axes, et AC, BC, les moitiés de ces mêmes axes. Fig. 7.

613. THÉORÈME 4. BAD *étant un demi-cercle*; PM, QN, *etc., étant ses ordonnées perpendiculaires au diamètre* BD, *supposons qu'on ait rapporté ces ordonnées en* P*m*, Q*n*, *etc., sur les droites* P*m*, Q*n*, *etc., parallèles entre elles, et passant par les pieds des ordonnées* PM, QN, *etc., la suite des points m, n, etc., déterminera une demi-ellipse* B*mna*D. Fig. 6.

Pour démontrer cette proposition, prenons un point B' sur le prolongement de BD, et menons par ce point les droites B'A', B'*a*', respectivement parallèles à PM et à P*m*; puis imaginons que B'A' soit la projection du demi-cercle BAD sur un plan vertical $\pi\pi'$, perpendiculaire à BD. Portons B'M' en B'*m*', B'N' en B'*n*', etc.: les droites *m*'*m*, *n*'*n*, etc., seront parallèles à BD; d'où l'on voit que si l'on fait passer par le demi-cercle (BAD, B'A') un cylindre parallèle aux droites (M*m*, M'*m*'), (N*n*, N'*n*'), etc., il coupera le plan B'*a*' suivant une courbe (B*mna*D, B'*a*'), qui aura pour projection horizontale la ligne en question. Or, la courbe (B*mna*D, B'*a*') ne sera autre chose qu'une projection oblique du demi-cercle sur le plan B*a*'; donc cette courbe sera une ellipse (589): donc la ligne B*mna*D, qui est sa projection horizontale, sera aussi une ellipse.

Pl. 40. Il est clair que le cercle entier auquel appartient BAD, donnerait l'ellipse entière.

Fig. 6. 614. Et comme la projection de la tangente à une courbe est la tangente de la projection de cette courbe (*), on voit que le point T, de la tangente MT, sera lui-même sa projection oblique, et que T*m* sera la tangente en *m* à la ligne B*mna*D.

Il suit de là que les tangentes en B et D, à cette ligne, sont les droites B*p*, D*q*, parallèles à P*m*; que la tangente en *a* est la droite *pq*, parallèle à BD, et que C*a*. CD, sont les demi-diamètres conjugués égaux de la demi-ellipse B*mna*D.

Fig. 4. 615. *Problème* 1[er]. *Etant donnés un axe* AA′, *et un point* M *d'une ellipse, trouver l'autre axe.*

Supposons que l'axe donné soit le grand axe, et du point M comme centre, avec un rayon égal à la moitié CA de AA′, décrivons un arc *rr′*; cet arc rencontrera en un point D la perpendiculaire BB′, élevée à AA′ par le point C, et si l'on joint les points M et D par la droite MD, cette droite coupera le grand axe AA′ en un point x, tel qu'en prenant CB = CB′ = Mx, BB′ sera le petit axe demandé (611).

Fig. 5. Si l'axe donné AA′ était le petit axe, avec AC = $\frac{1}{2}$ AA′, comme rayon, on décrirait, du point M comme centre, un arc *rr′*; cet arc rencontrerait en un point D la droite BB′, élevée perpendiculairement à AA′ par le point C, tel que CA = CA′; on menerait la droite MD, qui irait couper AA′ en un point x, et BB′ = 2CB = 2Mx, serait le grand axe demandé.

616. *Problème* 2. *Une surface conique à base circulaire et un plan étant donnés, déterminer leur intersection en construisant plusieurs systèmes de diamètres conjugués de cette intersection.*

Pl. 43. Fig. 4. On a vu précédemment (545—549) que TURV étant la base de la surface conique, (S, S′) son sommet, et (AB, BD) le plan coupant, il suffisait de mener par le sommet un plan (*ω′ω*, *ω*S′), parallèle à (AB, BD), pour construire autant de systèmes de diamètres conjugués (*tr*, BD), (*vu*, BD), qu'on aura déterminé de systèmes de cordes polaires TR, VU, dont les pôles O et O′ soient sur *ω′ω*. Or, chaque système de diamètres conjugués donnera quatre points de la section, et les quatre tangentes correspondantes; on n'aura donc besoin que d'un petit nombre de cordes polaires, telles que TR et VU, pour déterminer l'intersection demandée, et il serait superflu de nous arrêter ici aux constructions à faire.

Si la section était hyperbolique ou parabolique, on opérerait comme il résulte des nos 554—558, et 563—566.

Les mêmes constructions s'appliqueraient au cas où la trace TURV serait une section conique quelconque.

(*) Il est aisé de voir que les raisonnemens du n° 90 s'appliquent au cas des projections obliques comme à celui des projections orthogonales.

617. *Problème 3. Connaissant l'intersection elliptique d'un cône à base circulaire et d'un plan, trouver les axes de cette intersection.*

Soit TURV la base de la surface donnée; soit $\omega'\omega$ l'axe des pôles de la section (537); enfin, soit s le rabattement de ce sommet autour de la trace $\omega'\omega$. Pl. 46. Fig. 8.

Nous abaisserons du centre C de TURV la perpendiculaire Ce sur $\omega'\omega$; par le point e nous menerons la tangente et, et nous abaisserons par le point de contact t la perpendiculaire tO″ sur Ce: le point O″ sera le pôle intérieur dont tous les conjugués sont situés sur la droite $\omega'\omega$ (543). Ce pôle étant connu, nous prendrons arbitrairement un point O sur cette droite; par ce point nous menerons la tangente OV; nous déterminerons le point de contact V, et nous ferons passer par ce point, et par le point O″, la droite VO″O′, qui ira couper en un point O′ l'axe $\omega'\omega$. On sait que les points O et O′ seront deux pôles conjugués à O″; qu'il correspondra à ces pôles un système de diamètres conjugués, et que l'angle OsO′ sera celui de ces diamètres: si donc cet angle était droit, ces mêmes diamètres seraient les axes demandés. Elevons par le point s la perpendiculaire sd à sO′, et portons sO en sd, au moyen de l'arc Od; il est clair que si les points O et O′ correspondaient aux axes, le point d se trouverait en O sur la droite $\omega'\omega$: donc si l'on prend sur cette droite une suite de points tels que le point O; qu'on en déduise une autre suite de points tels que le point d; que par ces points on mène une courbe auxiliaire *adxmynz*, cette courbe ira couper la droite $\omega'\omega$ suivant deux pôles x et z qui correspondront aux axes demandés, et ces pôles étant connus, on en déduira facilement ces axes.

Il est aisé de voir que la courbe auxiliaire *adxmynz* a pour asymptote la droite rsr' perpendiculaire à se.

618. Il sera bien important de ne pas confondre les pôles x et z, qui se correspondent, avec le point y, où se coupent la courbe *adxmynz* et la droite $\omega'\omega$. Pour cela, il faudra opérer avec beaucoup d'ordre; prendre d'abord le point O à l'infini au-dessus de Ce; prendre les autres positions de ce point assez voisines les unes des autres; numéroter la suite des points tels que O, la suite des points tels que O′, et la suite des points tels que d: alors on verra que le point y ne correspond, comme pôle, ni au point x, ni au point z; et l'on reconnaîtra que ce point étant sur un arc yY, décrit du point s comme centre, il arrive que le point O étant en Y, le point d est en y, sans pour cela que les points Y et y, analogues à d et O, coïncident en un seul.

Cette particularité tient à ce que l'idée de rapporter le point O en d transforme la question à résoudre en une autre, qui n'est pas identique avec la première, et qui a une solution particulière qui n'appartient pas à celle-ci. Toutes les fois qu'on emploie des courbes auxiliaires, il faut, de crainte d'erreur, examiner si cette circonstance n'a pas lieu, c'est-à-dire vérifier si effectivement les solutions obtenues satisfont au problème proposé. Ici il ne s'agira que de reconnaître que le point z est bien réellement le pôle conjugué du pôle x.

619. *Problème 4. Connaissant l'intersection d'un cylindre à base circulaire et d'un plan, trouver les axes de cette intersection.*

On sait (571) que les droites Cφ, Cζ, étant menées à angle droit par le centre C de la base circulaire, ces droites couperont la trace AB du plan coupant aux deux pôles φ et ζ, Pl. 43. Fig. 2.

Pl. 43. Fig. 2. tels que les droites menées par ces pôles, et par le centre (c, c') de la section, fassent entre elles un angle droit.

Fig. 3. Donc, TURV étant la base du cylindre, AB étant la trace du plan coupant, et γ étant le rabattement du centre de la section autour de AB, si l'on élève sur le milieu de $C\gamma$ la perpendiculaire mn, qui rencontre AB en m, et que du point m, comme centre, avec mC comme rayon, on décrive le demi-cercle $\zeta C\gamma\varphi$, ce demi-cercle sera tel que les angles $\zeta C\varphi$, $\zeta\gamma\varphi$, soient tous deux droits; les points ζ et φ seront les pôles correspondans aux axes de la section, et les droites $\zeta\gamma$, $\varphi\gamma$, seront le rabattement de ces axes.

LIVRE V.

QUESTIONS DIVERSES.

CHAPITRE PREMIER.

Développement des surfaces.

620. Les surfaces développables sont fréquemment employées dans les arts à cause de la propriété, qui les caractérise, de pouvoir être déroulées sur un plan, sans éprouver ni déchirure ni duplicature (253).

D'après cela, la question de développer une surface développable, et de rapporter sur son développement les *transformées* des courbes qu'elle contient (426), est une question importante à laquelle il convient que nous nous arrêtions. On a déjà vu (430 et 440) comment elle se résout pour le cas du cylindre droit et pour le cas du cône droit; nous allons la résoudre dans d'autres cas plus compliqués, et nous exposerons, dans un problème général, les recherches qu'exige la solution complète du développement d'une surface développable donnée.

621. *Problème* 1er. *Étant donnée une surface cylindrique quelconque, on demande de construire son développement, de rapporter sur ce développement une courbe connue sur la surface donnée, et de mener une tangente à la transformée de cette courbe, par un point choisi arbitrairement sur cette transformée.*

Pour résoudre ce problème, nous remarquerons que dans le développement d'une surface cylindrique, tous les élémens de cette surface sont nécessairement parallèles entre eux; d'où il suit que toute ligne tracée sur un cylindre, de manière qu'elle coupe perpendiculairement tous ses élémens, est une ligne droite dans le développement (430). Or, l'intersection d'une surface cylindrique, et d'un plan perpendiculaire à ses élémens, est

une courbe perpendiculaire à ces mêmes élémens; donc cette courbe se transforme en une droite sur le développement de la surface cylindrique (*).

622. Il suit de là que le développement demandé s'obtiendra en rectifiant cette courbe, et en menant par chacun de ses points des droites qui lui soient perpendiculaires; car chacune de ces droites sera un élément de la surface, et leur ensemble formera évidemment ce développement. D'après cela, il va être facile de résoudre la question proposée.

Pl. 47. 623. Soit (ABC, I'C') l'intersection d'une surface cylindrique quelconque avec le plan horizontal, et (AD, A'E') l'un des élémens de cette surface. Pour obtenir son développement, nous menerons d'abord un plan quelconque (FG, GH), perpendiculaire aux élémens du cylindre, et nous chercherons son intersection avec ce cylindre. Pour cela, nous les couperons l'un et l'autre par des plans verticaux parallèles à AD; parce que ces plans, faciles à représenter, donneront des lignes droites pour sections avec le cylindre.

Le plan de construction AD, par exemple, coupera la surface cylindrique suivant les deux élémens (AE, A'E'), (CP, C'P'), et le plan (FG, GH) suivant une droite passant par le point (D, D'). Pour avoir un second point de cette droite, on menera par un point quelconque H de la trace verticale GH, une horizontale (H'N, HN'), située dans le plan (GF, GH); elle percera le plan AD suivant le point (N, N'), et la droite (DE, D'E'), menée par ce point et par le point (D, D'), sera la droite cherchée. Au moyen des sections (AE, A'E'), (CP, C'P') et (DE, D'E'), on déterminera les projections verticales P' et E', des points de l'intersection situés dans le plan auxiliaire AD, et ensuite, on les rapportera en projection horizontale en P et E.

Une fois qu'on aura déterminé la direction D'N', de la projection verticale d'une section du plan (FG, GH) avec un plan auxiliaire AD, l'emploi des autres plans auxiliaires deviendra très simple. En effet, soit IK un de ces plans; il coupera la surface cylindrique suivant les élémens (BK, B'L'), (IM, I'M'), et le plan (FG, GH) suivant la droite (KL, K'L'), menée par le point (K, K') parallèlement à (DE, D'E'), ce qui déterminera tout de suite les points (L, L'), (M, M'), de l'intersection cherchée (LPnM, L'P'n'M').

(*) Dans les arts, on donne le nom d'*arc droit* aux lignes d'une surface développable qui se changent en lignes droites sur le développement de cette surface.

Il sera facile de la décrire, dès qu'on aura construit un nombre suffisant de points tels que (E, E'), (P, P'), (L, L'), (M, M'). Pl. 47.

624. Il s'agira ensuite d'obtenir la ligne (LP*n*M, L'P'*n*'M') dans sa véritable grandeur, afin de pouvoir la rectifier. Or, il suffira pour cela de rabattre son plan autour de l'une de ses traces GF ou GH. Supposons que ce soit autour de GF. Un point quelconque (L, L') décrira un arc de cercle vertical LO, dont le centre sera en K, et qui aura pour rayon l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont un côté sera l'horizontale LK, et l'autre côté la verticale *l*L'. En portant donc cette hypoténuse de K en O sur la droite LO, on obtiendra le point O, rabattement de (L, L'). D'après cela, il sera aisé d'obtenir la courbe OSQ, rabattement de (LP*n*M, L'P'*n*'M'), autour de GF. Le rabattement RTU de la même courbe, autour de la charnière GH, s'obtiendra par les mêmes moyens; et les deux courbes OSQ, RTU, dont une seule sera nécessaire, devront être parfaitement égales.

625. Maintenant, divisons la courbe OSQ en arcs VX, XY, YS, etc., VO, OZ, etc., assez petits pour qu'on puisse supposer, sans erreur sensible, qu'ils se confondent avec leurs cordes. Ensuite, ayant mené une droite quelconque *q'q*, portons, à partir d'un point *v* de cette droite, à la suite les unes des autres et d'un même côté, les parties VX, XY, YS, etc., en *vx*, *xy*, *ys*, etc. Puis, portons de l'autre côté les parties VO, OZ, etc., en *vo*, *oz*, etc. La ligne indéfinie *q'q* présentera la rectification de la courbe OSQ, dont la longueur est censée infinie lorsqu'on imagine qu'elle est formée par un fil qui se déroule de dessus lui-même pour donner *q'q*. Pl. 47 et Pl. 48. Fig. 1.

Cela posé, élevons par chaque point *v*, *x*, *y*, *s*, etc., *v*, *o*, *z*, etc., de la droite indéfinie *q'q*, des perpendiculaires à cette droite. Chacune d'elles représentera un élément du cylindre donné, en sorte que le plan indéfini représentera le développement général de ce cylindre, et que la partie comprise entre les élémens indéfinis *q'a'*, *qa*, représentera la partie qui correspond à une simple circonvolution de la courbe OSQ.

626. Soit (ABC, I'C') la courbe dont on demande la transformée. Il faudra, pour obtenir cette transformée, prendre la longueur de chaque portion d'élément (PC, P'C'), (LB, L'B'), (MI, M'I'), etc., et la porter, savoir : la première (PC, P'C') sur la droite *cv*, depuis le point *v*, qui représente le point V, ou, ce qui revient au même, qui représente le point (P,P'), jusqu'en *c*; la deuxième (LB, L'B') sur la droite *ob*, depuis le point *o*, qui représente le point O, ou, ce qui revient au même, le point (L, L'), jusqu'en *b*; et ainsi des autres. On décrira ensuite une courbe *a'ibca*, pas-

Pl. 47 et Pl. 48. Fig. 1. sant par les points obtenus, c, b, i, a', etc., et cette courbe sera la transformée de (ABC, I'C').

Il est évident que cette transformée s'étend à l'infini par ses deux extrémités (432), et que la partie $a'ca$ correspond à une circonvolution de (ABC, I'C').

627. Il s'agira encore de mener une tangente à la courbe $a'ca$ par un quelconque b de ses points. Pour cela on construira d'abord l'élément ob, qui contient ce point sur le développement; il sera facile d'en déduire le point (L, L') de la courbe (LPnM, L'P'n'M'), lequel s'applique en o quand on rectifie cette courbe, et lorsqu'on connaîtra le point (L, L') on menera l'élément (BL, B'L'), qui déterminera le point (B, B'), correspondant au point b. Par le point B on menera la droite BF, tangente en B à la trace ABC; on en déduira la tangente (FLW, F'L'W'), à la courbe (LPnM, L'P'n'M') en (L, L'), ainsi que la tangente OF au rabattement OQS.

Les tangentes FB, (FL, F'L'), étant dans un même plan, tangent au cylindre donné suivant l'élément (BL, B'L'), elles formeront avec cet élément un triangle (FLB, F'L'B'), qui ne variera pas dans le développement du cylindre. Or, ce triangle est rectangle en (L, L'), le côté (LB, L'B') égale ob, le côté (FL, F'L') égale FO; donc, si l'on porte FO de o en f, et que l'on mène fb, le triangle fob sera égal au triangle (FLB, F'L'B'). Et comme l'angle (LBF, L'B'F'), de la tangente et de l'élément, ne varie pas quand on développe le cylindre (497), la droite fb sera la tangente cherchée.

On remarquera que la droite W'U, menée par le point W', où la tangente (FL, F'L') perce le plan vertical, et par le point U, rabattement de (L, L'), est tangente en U à la courbe RTU; et que la ligne W'U égale (LW, L'W').

628. *Exécution de l'épure.* Le plan (FG, GH) étant une des grandeurs les plus importantes de l'épure, on a supposé que ce plan existait dans l'espace. Il est clair qu'il cache, en projection horizontale, toute la partie du cylindre située au-dessous de la section (LPnM, L'P'n'M'); et qu'en projection verticale, au contraire, c'est la partie du même cylindre, située au-dessus de cette section, qui se trouve cachée. D'après cela, il est aisé de déterminer les lignes pleines et ponctuées de l'épure.

629. PROBLÈME 2. *Étant donnée une surface conique, on demande d'en construire le développement, de rapporter sur ce développement une*

courbe donnée sur la surface conique, et de mener une tangente à la transformée par un quelconque de ses points.

Pour cela, nous remarquerons que tous les élémens d'un cône se croisent sur son développement suivant le point où son sommet se trouve appliqué. Si donc on prenait sur les élémens de la surface donnée une suite de points également distans de son sommet, ils formeraient nécessairement sur cette surface une courbe particulière, qui jouirait de la propriété de se dérouler suivant un cercle sur le développement demandé. Or, il est clair que cette courbe n'est autre chose que l'intersection d'un cône donné avec une sphère ayant son centre au sommet de ce cône.

630. Cela posé, concevons qu'on ait construit une telle courbe : il sera facile d'en déduire le développement de la surface donnée; car il ne s'agira, pour cela, que de rapporter cette courbe sur un cercle d'un rayon déterminé, et toutes les droites menées par le centre de ce cercle, et par les points de sa circonférence, représenteront les élémens de cette surface et formeront son développement. C'est ce que l'application à un exemple va achever d'éclaircir.

631. Soit (A, *a*) le centre de la surface conique donnée, soit BCDE sa trace horizontale, et soit *am* le rayon de la sphère par laquelle nous allons couper cette surface conique dans le but d'obtenir la courbe dont la transformée est circulaire. Pl. 49.

Pour déterminer cette courbe, c'est-à-dire l'intersection (NIKH, *nikh*) du cône et de la sphère dont il s'agit, nous allons couper ces deux surfaces par des cônes droits verticaux dont les centres soient en (A, *a*). Ces cônes auront pour intersections, avec la sphère, des cercles, et avec le cône donné, des droites; et les points communs des cercles et des droites, qui correspondront à un même cône auxiliaire, appartiendront à l'intersection cherchée.

Décrivons donc, du point A comme centre, un cercle quelconque CFE, que nous prendrons pour base d'un des cônes auxiliaires. En général, ce cercle rencontrera la trace BCDE, du cône donné, en plusieurs points E et C, auxquels correspondront les projections horizontales AC, AE, des élémens d'intersection du cône donné et du cône auxiliaire. Le point F étant en projection verticale en *f*, la méridienne principale du cône sera la droite (AF, *af*); cette droite rencontrera la méridienne (LM, *lgm*) de la sphère en un point (G, *g*), et il est clair que le cercle (IGHL, *gl*) sera l'intersection de cette sphère et du cône auxiliaire. Mais ce cer-

Pl. 40 cle, et les élémens projetés horizontalement en AC et AE, se rencontreront suivant les points dont les projections horizontales sont en I et H; si donc on met ces points en projection verticale sur la droite *lg*, on aura deux points (H, *h*), (I, *i*), de l'intersection cherchée (NIKH, *nikh*).

En menant de nouveaux cônes auxiliaires, on aura de nouveaux points, tels que (H, *h*), (I, *i*), et l'on pourra décrire cette courbe.

632. Pour la tracer avec exactitude, il sera bon de construire plusieurs points singuliers qui correspondent aux contours des projections verticales du cône et de la sphère.

Le point singulier qui correspond au contour (AB, *ab*), par exemple, sera dans le plan vertical AB; or, en ramenant ce plan en AQ, le point (B, *b*) viendra en (Q, *q*), l'élément (AB, *ab*) viendra par conséquent en (AQ, *aq*), et comme la méridienne sphérique AB viendra en (LM, *lgm*), il s'ensuit que le point cherché se trouvera en (R, *r*). En ramenant donc le point (R, *r*) en (N, *n*), ce dernier point sera celui où la projection verticale de la courbe (NIKH, *nikh*) touchera la droite *ab*. On déterminera pareillement le point (K, *k*).

Les points singuliers qui correspondent au contour (LM, *lgm*), de la sphère, se trouveront encore plus facilement, car ils seront les intersections de la méridienne (LM, *lgm*), avec les élémens du cône donné situés dans le plan LM. (AS, *as*) est un de ces élémens; il rencontre (LM, *lgm*) en (T, *t*) : ainsi, (T, *t*) est l'un de ces points. Il sera aisé de vérifier que l'autre est en (O, *o*).

Il est clair que la nappe supérieure du cône contient une seconde branche de l'intersection qui nous occupe; mais nous ferons abstraction de cette seconde branche.

633. Il s'agirait maintenant, pour avoir le développement demandé, de rapporter la courbe à double courbure (NIKH, *nikh*) sur un arc de cercle $t'''k''n''\theta$, décrit avec le rayon $A't''' = an$; mais, pour cela, il faut d'abord obtenir, par le moyen exposé n° 431, une transformée de la courbe (NIKH, *nikh*), qui présente la véritable longueur de cette courbe.

On développera donc le cylindre vertical TIKHNT. La trace TIKHNT ayant été rectifiée sur la droite T′T″, et les perpendiculaires T′*t*′, I′*i*′, K′*k*′, etc., ayant été élevées par les points T′, I′, K′, etc., correspondans à T, I, K, etc., on portera sur ces perpendiculaires les hauteurs des points (T, *t*), (I, *i*), (K, *k*), etc., au-dessus du plan horizontal, et la

courbe $t'i'k'h'n't''$ aura évidemment la même longueur que la courbe à double courbure (TIKHN, *tikhn*). Pl. 49.

634. Connaissant la ligne $t'i'k'h'n't''$, on la divisera en parties assez petites pour qu'on puisse les considérer comme sensiblement droites, et l'on portera ces parties, à la suite les unes des autres, sur l'arc de cercle $t'''i''k''\theta$. L'arc $t'i'$ se trouvera en $t'''i''$, $i'k'$ en $i''k''$, $k'h'$ en $k''h''$, $h'n'$ en $h''n''$ et $n't''$ en $n''\theta$. En imaginant donc une infinité de droites, terminées au point A', et menées par ce point et par différens points de l'arc $t'''k''\theta$, indéfiniment du côté de ces derniers points, l'ensemble de ces lignes représentera le développement de la nappe inférieure du cône donné, correspondante à une circonvolution de la courbe (NIKH, *nikh*).

Il est aisé de voir qu'on aurait le développement de la nappe supérieure en prolongeant les droites en question de l'autre côté du point A'. Quant aux parties du cône, correspondantes à de nouvelles circonvolutions de (NIKH, *nikh*), on les aurait en prolongeant indéfiniment, et par ses deux extrémités, la transformée $t'i'k'h'n't''$, et en portant ses différentes parties sur le cercle entier $t'''k''\theta$. On voit qu'alors les circonvolutions successives de la surface donnée s'appliqueraient les unes sur les autres.

635. Proposons-nous maintenant de rapporter, sur le développement obtenu, une courbe quelconque BCDE, connue sur le cône donné. Soit C un point de cette courbe qu'on veuille avoir sur le développement. On menera par ce point la droite AC, projection horizontale de l'élément correspondant; cette droite déterminera un point (I, i) de la ligne (NIKH, *nikh*); on construira la longueur af de l'élément AC; ensuite, on rapportera le point (I, i) en i', sur la transformée $t'i'k'h'n't''$, puis en i'', sur le cercle $t'''k''\theta$: par le point i'' on menera la droite $A'i''$, on prendra sur cette droite $A'C' = af$, et le point C' représentera le point C, sur le développement du cône donné.

On construira de la même manière les points S', D', E', B', S'', qui représentent S, D, E, B, S, et l'on aura la transformée S'C'D'E'B'S'' de BCDE.

636. Enfin, proposons-nous de mener par un point quelconque C', de la transformée S'C'D'E'B'S'', une tangente à cette courbe. Pour cela, nous rapporterons d'abord ce point sur le cône donné. Or, l'élément A'C' coupe la courbe $t'''i''k''\theta$ en un point i''; si donc on rapporte ce point en i' sur $t'i'k'h'n't''$, que l'on construise le point I', et qu'on rapporte ce dernier point en I, il est clair que le point (I, i) sera le correspondant de i'', en

Pl. 49. sorte qu'en menant la droite AIC, elle déterminera le point C correspondant de C'.

Connaissant les deux points (I, i) et C, il s'agira de mener par ces points des tangentes aux courbes respectives auxquelles ils appartiennent. La courbe BCDE étant une courbe donnée, on devra savoir mener sa tangente CX, et cette tangente sera la trace du plan tangent au cône suivant le point (I, i). Par ce même point (I, i), on menera un plan tangent à la sphère ; il aura pour trace horizontale une droite VX, qui coupera CX en un point X ; par ce point et par le point (I, i), on menera la droite (XI, xi), et cette droite sera la tangente en (I, i) à la courbe (NIKH, $nikh$).

L'élément AI du cône donné étant un rayon de la sphère, et la tangente (XI, xi) étant dans le plan tangent correspondant, cet élément et cette tangente se couperont à angle droit; donc le triangle projeté en CXI sera rectangle en (I, i). Mais on sait (497) que pour avoir la tangente en C', il suffit de construire l'angle en C de ce triangle; si donc on mène $i''x'$ perpendiculaire à A'C', et que l'on construise l'hypoténuse C'x' égale à Cx, la droite C'x' sera la tangente cherchée.

On pourra encore porter XI de I' en X', on menera la droite X'i' tangente en i' à la transformée $t'i'k'h'n't''$ (504); X'i' sera la véritable longueur de (XI, xi) : en portant donc cette longueur de i'' en x', il ne s'agira plus que de mener par les points C' et x' la tangente x'C'.

637. *Exécution de l'épure*. La sphère auxiliaire étant une des grandeurs les plus importantes de l'épure, on a supposé que la calotte $ulgm$ de cette sphère existait dans l'espace, et l'on a déterminé, d'après cette supposition, les lignes pleines et ponctuées de la pl. 49.

Il est clair que l'intersection (NIKH, $nikh$) est entièrement vue sur le plan horizontal, et qu'elle n'a de vu, sur le plan vertical, que le seul arc (TIK, tik). Quant aux autres lignes de l'épure, il sera facile de déterminer leurs parties vues et cachées. Nous ferons seulement observer que la méridienne $ulgm$ cesse d'être vue en t, et qu'elle ne recommence à être vue qu'au point où elle coupe le contour ad.

638. **Problème** 3. *Étant donné un héliçoïde développable, construire son développement.*

Pl. 50. Soit (ABC, A'B'C') l'hélice arête de rebroussement de la surface donnée. D'après ce qu'on a vu n° 263, il sera facile de construire autant d'élémens de cette surface qu'on en voudra. Soit donc (AD, A'D'), (EF, E'F'), (GH, G'H'), etc., quelques-uns de ces élémens

et, afin de moins embrouiller la figure, ne projetons, sur les plans de projection, que les portions de ces mêmes élémens qui appartiennent à la nappe inférieure de l'héliçoïde. Pl. 50.

639. Nous remarquerons d'abord que les positions successives (E, E′), (G, G′), (I, I′), etc., d'un point quelconque (D, D′) de la génératrice, forment une hélice (DEGI..., D′E′G′I′...), qui a même axe et même pas que (ABC, A′B′C′). En effet, la génératrice ayant toujours la même inclinaison, les longueurs (DA, D′A′), (EF, E′F′), (GH, G′H′), etc., comprises entre le point décrivant et le point de contact de l'hélice, se projetteront suivant les lignes égales DA, EF, GH, IK, etc., ce qui fait voir que la projection horizontale DEGI..., de la ligne décrite, sera la circonférence d'un cercle dont le centre est en O. D'un autre côté, il est évident que les points (E, E′), (G, G′), (I, I′), etc., sont élevés au-dessus du point (D, D′) de hauteurs égales à celles de leurs correspondans (F, F′), (H, H′), (K, K′), etc., au-dessus du point (A, A′): mais ces dernières sont proportionnelles aux arcs AF, AH, AK, etc. (110); ces arcs sont proportionnels aux arcs ED, GD, ID, etc.; donc les hauteurs des points (E, E′), (G, G′), (I, I′), etc., au-dessus du point (D, D′), sont proportionnelles aux arcs ED, GD, ID, etc.: ce qu'il fallait démontrer.

640. Maintenant je dis que toute hélice (DEG.., D′E′G′...), située sur la surface donnée, se change en un cercle sur le développement de cette surface. Pour le prouver, supposons que les arcs DE, EG, GI, IL, etc., soient égaux et infiniment petits : les portions de surfaces projetées en DEFAD, EGHFE, GIKHG, etc., seront planes et parfaitement égales entre elles; donc lorsqu'on les rapportera à côté les unes des autres, en $d'e'f'd'd'$, $e'g'h'f'e'$, $g'i'k'h'g'$, etc., pour avoir le développement demandé, elles formeront une courbe $d'e'g'i'l'...$, qui aura en tous ses points une même courbure. Donc la ligne $d'e'g'i'l'...$, qui représentera, sur le développement, l'hélice (DEG..., D′E′G′...), sera la circonférence d'un cercle. Pl. 50 et Pl. 51. Fig. 1.

641. Et comme une autre circonférence PQRS..., qui représenterait une autre hélice de la surface, couperait les droites $d'a'$, $e'f'$, $g'h'$, $i'k'$, etc., en des points P, Q, R, S., etc., évidemment tels qu'on ait $d'P = e'Q = g'R = i'S$, etc., il s'ensuit que toutes ces circonférences seront concentriques.

642. Cela posé, considérons sur la surface donnée les deux hélices (DEG..., D′E′G′...), (ABC, A′B′C′), et un élément quelconque (LB, L′B′), qui ne sera autre chose que la tangente en un point (B, B′) de l'hélice (ABC, A′B′C′). Menons par le point (L, L′) la tangente (LM, L′N′) à l'hélice (DEG..., D′E′G′...) (112). Il est clair que le plan tangent à la surface donnée, suivant l'élément (LB, L′B′), aura pour trace horizontale la droite MN : et comme la droite LB se trouve, dans la figure, parallèle à la ligne de terre, la droite MN, nécessairement perpendiculaire à LB, sera perpendiculaire à N′D′, et la trace verticale de ce plan sera la droite N′L′. Or, concevons qu'on ait développé l'héliçoïde sur le plan tangent (NN′, N′L′) : les élémens infiniment petits ux, yz, des hélices (DEG..., D′E′G′...), (ABC..., A′B′C′...), n'auront pas changé dans le développement, et se trouveront appartenir aux circonférences qui représenteront ces hélices; d'où il faut conclure que les tangentes (ML, N′L′), (LB, L′B′), détermineront le centre commun de ces circonférences, et par suite, ainsi qu'on va le voir, le développement demandé. Pl. 50.

Exécutons ces constructions, et pour cela, rabattons le plan (NN′, N′L′) autour de NN′ sur le plan horizontal. Le point (L, L′) viendra s'abattre en l, le point (B, B′) en b, la

Pl. 50. ligne (NL, N′L′) en Nl, et les droites (ML, N′L′), (NB, N′B′), respectivement tangentes aux hélices (DEG..., D′E′G′...), (ABC..., A′B′C′...), en (L, L′) et (B, B′), viendront s'abattre en Ml et Nb. Ces rabattemens Ml et Nb, seront, comme nous venons de le dire, les tangentes en l et b, aux circonférences qui représenteront les hélices (DEG..., D′E′G′...), (ABC, A′B′C′); donc, si l'on élève par le point l, lo perpendiculaire à Ml, et par le point b, bo perpendiculaire à Nb, le point o sera le centre de ces circonférences, et leurs rayons seront les droites lo et bo.

Pl. 50 et Pl. 51. Fig. 1. 643. Prenons donc un point o' sur un plan, et décrivons de ce point comme centre, avec les rayons $o'l' = ol$, $o'b' = ob$, les circonférences $d'e'g'l'\ldots$, $a'f'h'k'\ldots$ Ensuite, portons les arcs DE, DG, etc., de D″ en E″, de D″ en G″, etc., sur une droite D″G″; et ayant élevé par les points E″, G″, etc., les droites E″E‴, G″G‴, etc., perpendiculaires à D″G″, portons sur ces perpendiculaires les hauteurs respectives E″E‴, G″G‴, etc., des points (E, E′), (G, G′), au-dessus du plan horizontal : il est clair que la droite D″E‴G‴... sera la transformée de l'hélice (DEG..., D′E′G′...). D'après cela, si l'on porte les lignes D″E‴, E‴G‴, etc., de d' en e', de e' en g', etc., sur la circonférence $d'e'g'l'\ldots$, et qu'on mène par les points d', e', g', i', $l'\ldots$, correspondans à (D, D′), (E, E′), (G, G′), (I, I′), (L, L′)..., des droites $d'a'$, $e'f'$, $g'h'$, $i'k'$, $l'b'\ldots$, la figure... $l'i'g'e'd'a'f'h'k'b'\ldots$ sera le développement de la partie de l'héliçoïde donné projetée sur le plan horizontal en ...LIGEDAFHKB...

644. Si l'on veut obtenir le développement de la portion de la nappe supérieure qui est comprise entre les élémens (DA, D′A′), (LB, L′B′), et qui est terminée au cylindre vertical DEGIL, il ne s'agira que de prolonger les droites $d'a'$, $l'b'$, jusqu'aux points r et t, où elles coupent la circonférence $d'e'g'i'l'\ldots$, et la portion $ra'f'h'k'b'tsr$, du plan de la figure, sera le développement cherché.

645. On voit, par ce qui vient d'être dit, que lorsqu'on développe la surface donnée, l'arête de rebroussement (ABC, A′B′C′) se plie sur le cercle $a'f'h'k'\ldots$, suivant une infinité de circonvolutions de ce cercle ; que les élémens de cette surface deviennent des tangentes au même cercle ; que le développement demandé s'applique sur le plan $d'l't$ tout entier, à la réserve de l'aire enfermée par la circonférence $a'b'u$, et que chaque nappe couvre ce plan un nombre infini de fois.

646. Une courbe quelconque étant donnée sur l'héliçoïde, il sera facile de rapporter cette courbe sur le développement obtenu, et de mener une tangente à sa transformée : nous ne nous arrêterons pas aux constructions qu'il faudrait faire pour cela.

647. Il suit de ce qui précède que si l'on donne à un morceau de carton, inextensible et éminemment flexible, la forme $d'e'g'i'l'b'k'h'f'a'd'$, et qu'on plie l'arc $a'h'b'$ de ce carton sur un arc d'hélice (AHB, A′H′B′), le carton coïncidera avec la surface développable donnée.

Nous déduirons de là un moyen très commode d'exécuter un modèle d'héliçoïde : on con-
Pl. 51. struira une hélice sur un cylindre, et l'on déterminera le développement $\alpha\beta\gamma\delta\iota\theta\alpha$, $\alpha\varphi\pi\psi\iota\theta\alpha$,
Fig. 2. de deux portions correspondantes des deux nappes de la surface développable dont cette hélice serait l'arête de rebroussement ; on découpera, dans un morceau de carton très mince et très flexible, deux pièces, l'une égale à l'aire $\alpha\beta\gamma\delta\iota\theta\alpha$, l'autre égale à l'aire $\alpha\varphi\pi\psi\iota\theta\alpha$; on disposera ces pièces comme elles le sont dans la figure, et en les passant autour du cylindre, de manière qu'elles se courbent dans des sens opposés, et que l'arc $\alpha\theta\iota$, qui leur est

commun, coïncide avec l'hélice tracée sur le cylindre, chacune d'elles formera la portion d'une nappe de l'héliçoïde correspondante à celle que formera l'autre pièce sur l'autre nappe. D'où l'on voit que l'ensemble des deux pièces de carton dont il s'agit donnera le modèle exact d'un héliçoïde et de son arête de rebroussement. Pl. 51. Fig. 2.

648. En général, en passant un morceau de carton $\alpha\beta\gamma\delta\pi\psi\iota\theta\alpha$ terminé à deux arcs de cercles concentriques $\alpha\theta\iota$, $\beta\gamma\varphi\delta\pi\psi$, autour d'un cylindre droit quelconque, en tendant l'arc $\alpha\theta\iota$ sur ce cylindre, et en laissant d'ailleurs le carton (supposé flexible et inextensible) parfaitement libre, il formera une portion d'héliçoïde, mais dont l'arête de rebroussement sera d'ordinaire sur un cylindre plus petit que le cylindre employé.

En effet, les tensions exercées aux extrémités de l'arc intérieur $\alpha\theta\iota$ devront le faire coïncider avec la plus courte ligne qu'on puisse mener entre ces extrémités sur la surface du cylindre; or, l'hélice est cette plus courte ligne, car elle a pour transformée une ligne droite sur le développement du même cylindre : donc l'arc $\alpha\theta\iota$ se pliera sur le cylindre suivant une hélice. D'un autre côté, deux charnières consécutives quelconques, suivant lesquelles le carton aura subi sa flexion, feront le même angle entre elles, et seront situées de la même manière par rapport à l'axe du cylindre, parce que tous les points de l'hélice $\alpha\theta\iota$ étant placés pareillement, par rapport au cylindre et par rapport à la surface du carton, il ne pourra rien arriver de particulier à aucun d'eux. Donc les élémens de l'arête de rebroussement, sur lesquels toutes ces charnières se couperont deux à deux, feront le même angle avec l'axe du cylindre, et en seront à des distances égales; donc cette arête de rebroussement sera une hélice : donc, etc.

Maintenant remarquons que l'on pourra incliner plus ou moins l'arc $\alpha\theta\iota$ sur le cylindre donné, et nous verrons qu'à chaque inclinaison il correspond un héliçoïde particulier. Pour chaque héliçoïde, l'angle des caractéristiques, et de l'arc $\alpha\theta\iota$, sera constant; mais il variera d'un héliçoïde à un autre : or, si cet angle est nul, elles seront toutes tangentes à l'hélice $\alpha\theta\iota$, et cette hélice sera par conséquent l'arête de rebroussement. Il est clair que pour toutes les autres valeurs du même angle, l'arête de rebroussement sera située dans l'intérieur du cylindre donné; que si cet angle est droit, le pas de l'hélice $\alpha\theta\iota$ sera nul, qu'elle se réduira à un cercle, et que l'héliçoïde sera un cône droit.

Nous ne parlerons pas des lignes pleines et ponctuées de l'épure; on voit assez comment on doit la dessiner.

649. *Problème général. Une surface développable quelconque étant donnée, construire son développement.*

On ne peut indiquer de méthode générale pour résoudre ce problème qu'en empruntant le secours de l'Analyse. D'après cela, nous nous contenterons de faire observer que dans chaque cas particulier où l'on connaît, sur une surface donnée, une courbe dont la transformée est connue sur le développement de cette surface, il est toujours possible d'obtenir ce développement par des opérations graphiques.

En effet, on pourra mener sur la surface donnée autant d'élémens qu'on en voudra, et l'on pourra déterminer leurs angles avec la courbe dont la transformée est connue. Et comme ces angles ne varient pas lorsqu'on développe la surface, il ne s'agira que de rapporter, sur la transformée de cette courbe, le point où elle est rencontrée par chaque élé-

ment; et au moyen de l'angle de cet élément avec la transformée, on construira la droite suivant laquelle il s'applique sur le développement. La même opération étant faite pour un nombre suffisant d'élémens, on aura ce développement.

CHAPITRE II.

Sur les Sphères.

650. PROBLÈME 1er. *Déterminer la sphère circonscrite à un tétraèdre donné.*

Pour résoudre ce problème, nous remarquerons que chaque arête du tétraèdre donné est une corde de la sphère cherchée. Or, c'est une propriété générale des sphères, que tout plan perpendiculaire sur le milieu d'une de leurs cordes passe par leur centre. Il s'ensuit donc que si l'on mène, par le milieu des trois arêtes du tétraèdre, trois plans perpendiculaires chacun à une de ces arêtes, ils se couperont suivant un point qui sera le centre de la sphère demandée.

651. D'après cela, il sera facile d'obtenir cette sphère. Prenons pour plan horizontal de projection un plan parallèle à l'une des faces du tétraèdre donné, et choisissons le plan vertical de manière qu'il soit parallèle à l'une des arêtes de ce solide. Cela posé, soient (A, A'), (B, B'), (C, C') et (D, D'), les quatre sommets du tétraèdre, et supposons que (A, A') et (B, B') étant ceux par lesquels passe l'arête (AB, A'B'), parallèle au plan vertical, les trois derniers (B, B'), (C, C') et (D, D'), soient ceux qui sont à la même distance du plan horizontal.

Pl. 52. Fig. 1.

Nous menerons deux plans verticaux *ab*, *cd*, respectivement perpendiculaires sur les milieux des deux côtés horizontaux (BC, B'C'), (BD, B'D'). Ces deux plans se couperont suivant une verticale (E, EE'), qui contiendra le centre de la sphère cherchée. Nous menerons ensuite un plan *f*E', perpendiculaire au côté (AB, A'B') parallèle au plan vertical, et ce plan contiendra le même centre; donc il coupera la droite (E, EE') suivant un point (E, E'), qui ne sera autre chose que ce centre.

En joignant le point (E, E') avec un quelconque des sommets (D, D') du tétraèdre donné, on obtiendra le rayon (ED, E'D') de la sphère cher-

chée, en sorte que si l'on décrit des points E et E' comme centres, avec la véritable grandeur de ce rayon, les cercles GHI, KLM, ces cercles donneront la représentation de cette sphère. Pl. 52. Fig. 1.

652. *Problème* 2. *Déterminer la sphère inscrite dans un tétraèdre donné.*

Concevons par une arête de ce tétraèdre un plan qui divise en deux parties égales l'angle des deux faces qui se coupent suivant cette arête ; ce plan sera le lieu de tous les points de l'espace également distans de ces deux faces : donc il contiendra le centre de la sphère demandée. Il suit de là que si nous menons, par trois arêtes du tétraèdre, trois plans qui divisent en deux parties égales les angles correspondans à ces arêtes, ces plans se couperont suivant le centre de cette sphère ; d'où l'on voit qu'il sera facile de la déterminer.

653. Pour opérer avec facilité, prenons pour plan horizontal de projection une face ABC du tétraèdre, et choisissons pour plan vertical un plan perpendiculaire à l'arête AB. Fig. 2.

Ayant représenté les quatre sommets (A, A'), (B, A'), (C, C'), (D, D'), nous menerons la droite A'E, de manière que l'on ait D'A'E = C'A'E, et il est clair que le plan A'E, perpendiculaire au plan vertical de projection, sera l'un des trois plans auxiliaires qui contiennent le centre cherché. Il s'agira d'obtenir la droite intersection des deux autres.

Faisons passer par l'arête (BD, B'D') le plan auxiliaire correspondant, et cherchons sa trace horizontale. Pour cela, rabattons le plan BD sur le plan horizontal ; le point (D, D') viendra s'abattre en un point d, et l'arête (BD, B'D') en Bd. Prenons sur l'arête rabattue Bd un point c, et concevons par ce point un plan cg perpendiculaire à Bd. Si l'on relève Bd en (BD, B'D'), et que l'on imagine que le plan cg suive l'arête Bd dans son mouvement, ce plan viendra prendre une position (ab, cg), telle que la trace horizontale ab soit une perpendiculaire à Bd menée par le point g. Cela posé, rabattons le plan (ab, cg) sur le plan horizontal ; le point c viendra s'abattre en e ; les points a et b, où la droite ab perce les faces (DBC, D'B'C') et A'D', ne changeront pas dans le mouvement ; ainsi, les intersections du plan dont il s'agit et de ces faces se rabattront suivant les droites ea, eb. Or, si l'on mène par le point e la droite ef, qui divise l'angle aeb en deux parties égales, cette droite sera dans le plan auxiliaire mené par l'arête (BD, B'D') : mais cette droite, relevée dans l'espace,

Pl. 52. Fig. 2. percera le plan horizontal en f; donc la droite Bf sera la trace du plan auxiliaire en question.

On trouvera de même la trace Ai du plan auxiliaire mené par l'arête (AD, A'D'). Les traces Bi, Ai, se couperont en un point i, qui donnera l'intersection des deux plans auxiliaires correspondans : et comme cette intersection (Di, D'i') perce en (o, o') le plan auxiliaire A'E, on en conclura que le centre de la sphère cherchée est en (o,o').

Connaissant le centre (o, o'), la représentation de la sphère demandée ne donnera lieu à aucune difficulté.

654. *Problème* 3. *Étant données trois sphères, on demande de construire, 1°. une sphère, d'un rayon connu, intérieurement tangente aux trois sphères données; 2°. la plus petite sphère qui puisse toucher intérieurement ces trois sphères.*

Occupons-nous d'abord de la première question, et supposons que la sphère demandée soit connue. Il est clair que le centre de cette sphère sera distant des centres des sphères données de longueurs respectivement égales à la somme du rayon de chacune d'elles et du rayon de la sphère demandée. Donc si l'on construit trois sphères auxiliaires qui aient pour rayons ceux des sphères données, augmentés du rayon de la sphère demandée, le centre de cette dernière sera l'intersection des trois sphères auxiliaires.

655. D'après cela, prenons pour plan horizontal de projection le plan des centres des trois sphères données; choisissons pour plan vertical un plan perpendiculaire à la droite Pl. 52. Fig. 3. menée par deux des centres de ces sphères, et soient (A, A'), (B, B'), (C, B'), les centres des mêmes sphères, et Aa, Bb, Cc, leurs rayons.

On augmentera ces rayons des quantités ad, be, cf, égales au rayon connu de la sphère demandée, et l'on décrira trois nouvelles sphères avec ces nouveaux rayons. Elles se couperont suivant trois cercles verticaux gh, ik, (lm, $l'n'm'n''$), dont le dernier sera parallèle au plan vertical, et qui auront pour intersections les deux points (n, n'), (n, n''). En décrivant donc de ces deux points comme centres, avec le rayon no=ad, les deux sphères (lpq, rst), (lpq, nox), ces deux sphères résoudront la première question du problème proposé.

656. Passons à la seconde question, et ayant pris pour plan de la figure celui des centres Pl. 48. Fig. 2. des trois sphères données, soient A, B, C, ces centres, et AD, BE, CF, les rayons correspondans.

Nous remarquerons que si des points A et B, comme centres, on décrit deux arcs de cercles avec des rayons AO, BO, égaux aux rayons AD, BE, augmentés d'une même quantité arbitraire PO=QO, les arcs décrits se couperont en deux points O et R, également distans des cercles A et B. En changeant donc la quantité arbitraire PO, pour avoir de nouveaux arcs, on obtiendra de nouveaux points, tels que O et R, et il est clair que la suite de ces points formera une branche HGL d'hyperbole, partout également éloignée des cercles A et B (861). Or, si l'on imagine que cette hyperbole tourne autour de la droite AB, prise pour axe de révolution, elle décrira une nappe d'hyperboloïde de révo-

lution à deux nappes (209), qui sera le lieu des centres de toutes les sphères à la fois tangentes aux sphères A et B. Pl. 48. Fig. 2.

Si l'on décrit de même, au moyen des centres A et C, une deuxième hyperbole IGM, elle déterminera une deuxième surface de révolution, qui sera le lieu des centres de toutes les sphères à la fois tangentes aux sphères A et C. Mais il est clair que cette surface de révolution coupera celle dont la génératrice est l'hyperbole HGL suivant une ligne courbe, qui sera le lieu des centres de toutes les sphères tangentes aux sphères données. Et comme le point G, intersection des génératrices HGL, IGM, appartient à cette ligne courbe, et se trouve, de tous les points de cette ligne, le plus rapproché des centres A, B, C, il s'ensuit que ce point est le centre de la sphère cherchée DEF.

On voit que cette solution donne également le cercle tangent intérieurement à trois autres, et la plus petite sphère tangente intérieurement à trois sphères.

657. Nous remarquerons en passant que les centres des sphères tangentes intérieurement aux trois sphères A, B, C, doivent se trouver à la fois sur les trois surfaces de révolution dont les droites AB, AC, BC, sont les axes, et dont les branches d'hyperbole HGL, IGM, KGN, sont les génératrices; d'où il suit que ces trois surfaces, au lieu de se couper suivant des points, comme des surfaces quelconques, se coupent suivant une courbe.

On peut en effet voir, fig. 3, pl. 52, que les points (n, n'), (n, n'') sont à la fois sur les trois cercles *gh*, *ik*, *lm*, qui appartiennent à ces surfaces, et qu'en faisant varier le paramètre $ad=be=ef$, on obtiendra de nouveaux points, tels que (n, n'), (n, n''), qui seront encore sur les trois nappes d'hyperboloïdes à deux nappes dont il s'agit (655).

658. Si, au lieu de demander des sphères tangentes intérieurement aux sphères données, on demandait celles qui les touchent extérieurement, les solutions précédentes ne subiraient qu'une légère modification, d'après laquelle chaque branche HGL d'hyperbole se trouverait remplacée par l'autre branche de la même hyperbole.

659. Problème 4. *Quatre sphères étant données, trouver une cinquième sphère qui les touche toutes les quatre.*

A deux des sphères données, il correspondra un hyperboloïde à deux nappes, lieu des centres de toutes les sphères tangentes à ces deux sphères (*voyez* le problème précédent); et cet hyperboloïde, qu'il sera facile de construire, contiendra le centre de la sphère demandée. D'après cela, il correspondra aux quatre sphères données six hyperboloïdes, qui se couperont suivant deux points, dont l'un sera le centre d'une sphère tangente intérieurement aux sphères données, et dont l'autre sera le centre de la sphère tangente extérieurement aux mêmes sphères. Or, les centres des sphères demandées étant trouvés, ces sphères s'ensuivront.

Pour indiquer comment on obtiendra ces centres, désignons par A, B, C, D, ceux des sphères données, et nommons ces sphères elles-mêmes, par les mêmes lettres A, B, C, D. Il correspondra à la sphère A, et à chacune des trois autres, trois hyperboloïdes dont les axes se couperont en A. On cherchera, par le procédé exposé n° 489, l'intersection de l'un de ces hyperboloïdes avec les deux autres, et l'on obtiendra deux courbes, qui se croiseront sur le premier hyperboloïde suivant les centres cherchés.

Si les trois hyperboloïdes choisis ne correspondaient pas à la même sphère A, au centre

de laquelle se coupent leurs axes, on ne pourrait pas employer le procédé fort simple du nº 489. Et si l'on prenait arbitrairement les trois hyperboloïdes, parmi les six que donnent les quatre sphères, il se pourrait qu'ils ne correspondissent qu'à trois de ces sphères : dans ce cas, ils auraient des courbes pour intersections et non pas des points (657), et ils ne détermineraient pas les centres cherchés.

CHAPITRE III.

Problèmes de Trigonométrie sphérique.

Pl. 53. Fig. 1. 660. Un triangle sphérique ABC est composé de trois côtés AB, AC, BC, qui sont trois arcs de trois cercles situés sur une même sphère, et de trois angles, qui sont ceux que font entre eux les plans des arcs AB, AC, BC. La science qui s'occupe de la détermination *numérique* de trois de ces six grandeurs, quand on donne les trois autres et que l'on connaît le rayon AM, est celle qui reçoit le nom de *Trigonométrie sphérique*. Nous allons résoudre *graphiquement* les problèmes auxquels elle conduit.

661. Les arcs AB, AC, BC, étant sur une sphère d'un rayon connu AM, on pourra leur substituer les angles AMB, AMC, BMC, qui leur correspondent au centre M ; et les six grandeurs, qui forment le triangle ABC, seront représentées par six angles.

Mais il est clair que ces six angles, qui sont les trois angles plans AMB, AMC, BMC, et les trois angles dièdres des plans AMB, AMC, BMC, sont les élémens constitutifs de l'angle solide trièdre MABC ; donc tout problème de Trigonométrie sphérique dans lequel, trois des six grandeurs qui composent un triangle étant données, on demande les trois autres, se change en un autre problème, où les données sont trois élémens d'un angle solide trièdre, et où les inconnues sont les trois autres élémens du même angle.

662. D'après cela, il suffira de savoir résoudre graphiquement ce problème, *Trois des six angles qui forment un angle solide trièdre étant donnés : trouver les trois autres*, pour pouvoir aussi résoudre graphiquement tous les problèmes de Trigonométrie sphérique.

Or, cette question générale se divisera en six autres, que voici :

1°. Étant donnés trois angles plans, trouver les trois angles dièdres. Pl. 53. Fig

2°. Étant donnés deux angles plans et l'angle dièdre compris, trouver l'autre angle plan et les deux autres angles dièdres.

3°. Étant donnés deux angles plans et l'angle dièdre adjacent à l'un d'eux, trouver l'autre angle plan et les deux autres angles dièdres.

4°. Étant donnés un angle plan et deux angles dièdres, dont l'un soit adjacent, trouver les deux autres angles plans et l'autre angle dièdre.

5°. Étant donnés un angle plan et les deux angles dièdres adjacens, trouver les deux autres angles plans et l'angle dièdre compris.

6°. Enfin, étant donnés les trois angles dièdres, trouver les trois angles plans.

663. Mais nous allons montrer que par la considération de l'*angle solide trièdre supplémentaire,* ces six questions se réduisent à trois.

MABC étant un angle solide trièdre quelconque, élevons, par le sommet M, les droites M*a*, M*b*, M*c*, respectivement perpendiculaires aux faces MAB, MAC, MBC.

On sait que deux droites *mn*, *mp*, perpendiculaires à deux plans MN, MP, font entre elles un angle *nmp* supplément de NMP; Fig. 2.

Donc l'angle solide trièdre M*abc* aura ses angles plans supplémentaires des angles dièdres de l'angle solide trièdre MABC. Fig. 1.

Or, la droite M*a* est perpendiculaire au plan AMB, et la droite M*b* perpendiculaire au plan AMC; donc le plan *a*M*b* est perpendiculaire à la droite MA, intersection de AMB et de AMC. Et comme les plans *a*M*c*, *b*M*c*, sont pareillement perpendiculaires aux arêtes respectives MB, MC, on en conclura que l'angle solide MABC a ses angles plans supplémentaires des angles dièdres de l'angle solide M*abc*.

D'où l'on voit *que les trois angles plans d'un de ces angles solides sont les supplémens des trois angles dièdres de l'autre.* C'est ce qui fait donner à l'angle solide M*abc* le nom d'*angle solide supplémentaire* de MABC : ce dernier est pareillement l'*angle solide supplémentaire* du premier (*).

664. Maintenant remarquons que les 1re, 2e et 3e questions, précédem-

(*) Au lieu de cette dénomination, on emploie souvent celle de *pyramide supplémentaire*, parce qu'on appelle *pyramides* les angles solides tels que MABC. Comme on ne considère pas ici de quatrième face qui puisse servir de base à ces solides, nous avons préféré le nom d'angle solide à celui de pyramide.

ment posées (662), sont, par rapport aux angles plans, ce que les 6e, 5e et 4e, sont par rapport aux angles dièdres. Nous en conclurons que si l'on sait résoudre les trois premières, on saura résoudre les trois dernières au moyen de l'angle solide supplémentaire ; car ce qui est angle plan dans l'angle solide donné, deviendra angle dièdre dans l'angle solide supplémentaire, et réciproquement (663).

Il résulte de là que pour résoudre les 4e, 5e et 6e questions, il faudra prendre les supplémens des trois angles donnés ; considérer les supplémens correspondans aux angles plans donnés, comme des angles dièdres, et ceux correspondans aux angles dièdres, comme des angles plans ; appliquer les solutions des questions 3e, 2e et 1re, et construire les supplémens des angles trouvés : ces supplémens seront les angles demandés.

Il ne s'agit donc plus que de résoudre graphiquement trois problèmes, pour savoir construire les solutions de toutes les questions de Trigonométrie sphérique.

665. PROBLÈME 1er. *Etant donnés les trois angles plans d'un angle solide trièdre, trouver ses trois angles dièdres* (*).

Pl. 53. Fig. 3. Soient AOB, BOC, COD, les trois angles plans donnés. Imaginons que le premier AOB, et le dernier COD, prennent au-dessus du plan BOC un mouvement de rotation, autour des droites respectives BO, CO, pour venir former l'angle solide en question. Il est clair que les deux droites mobiles AO, DO, décriront dans ce mouvement deux demi-surfaces coniques droites qui auront un élément commun, et que c'est quand les droites AO, DO, coïncideront entre elles, suivant cet élément, que l'angle solide sera formé. Or, si l'on prend OF = OE, les points F et E seront tels qu'ils se réuniront dans la formation de l'angle solide ; mais le point F décrira un arc de cercle (FI, FKI'), dont le plan sera perpendiculaire à la charnière OB ; le point E décrira un autre arc de cercle (EI, ELI''), dont le plan EI sera perpendiculaire à OC : donc ces points se réuniront suivant le point de l'espace projeté horizontalement en I et verticalement en I' et I''. Donc l'angle solide sera formé, 1°. par le plan BOC ; 2°. par le plan mené par BO et par le point (I, I') ; 3°. enfin, par le plan mené par CO et par le point (I, I'').

Maintenant il ne s'agira plus que de mener les droites GI', HI'' ; elles

(*) On sait que pour que l'angle demandé soit possible, il faut que les trois angles plans soient ensemble moindres que quatre angles droits, et que le plus grand soit plus petit que la somme des deux autres.

détermineront deux angles IGI', HHI', qui seront les deux angles demandés correspondans aux arêtes BO et CO. En effet, le plan GI est perpendiculaire à l'arête BO; donc c'est dans ce plan que se mesure l'angle des deux faces qui passent par BO : mais ce plan coupe la face BOC suivant GI', et la face AOB relevée suivant GI'; donc cet angle égale IGI'. De même, le plan HI étant perpendiculaire à OC coupe les faces de l'angle solide qui ont OC pour intersection suivant deux droites HI, HI', qui font entre elles l'angle IHI' de ces faces. Pl. 51. Fig. 3.

666. Il ne restera donc plus à déterminer que l'angle des deux faces AOB, COD.

Pour l'obtenir, on prendra AO = OD, et l'on remarquera qu'après la formation de l'angle solide, les points A et D sont réunis, et que les droites AB et DC, respectivement perpendiculaires à AO et DO, doivent mesurer l'angle cherché. Or, si l'on conçoit par ces deux droites un plan, il coupera la face BOC suivant BC, et l'angle trièdre suivant un triangle dont AB, BC, CD, seront les côtés; si donc on décrit, des points B et C comme centres, les arcs AK, DK, on formera ce triangle, et l'angle CKB sera le troisième angle demandé. Fig. 4.

667. *Problème 2. Étant donnés deux angles plans d'un angle solide trièdre et l'angle dièdre compris, on demande l'autre angle plan et les deux autres angles dièdres.*

Soient AOB, BOC, les deux angles plans donnés, et BE étant une droite perpendiculaire à OB, soit EBE' un angle égal à l'angle dièdre donné. Fig. 5.

On imaginera que le plan AOB tourne autour de BO, jusqu'à ce qu'il fasse avec BOC l'angle donné E'BE, et il est clair qu'alors les trois arêtes BO, CO, AO, formeront l'angle solide. Dans le mouvement, le point A, où la droite BE prolongée coupe AO, décrira un arc de cercle (AE, ADE'), et viendra s'arrêter en (E, E'). Si donc on conçoit une droite, menée par (E, E') et par le point O, l'angle de cette droite et de OC sera le troisième angle plan demandé. D'après cela, il sera aisé de le rabattre et d'avoir sa véritable grandeur. En effet, le point (E, E') décrira un arc de cercle dont le plan EG sera perpendiculaire à la charnière OC : or, si l'on rabat ce plan autour de sa trace EG, le point (E, E') viendra en E", en sorte qu'en décrivant, du point C comme centre, l'arc E"FG, on aura l'arc (EG, E"FG) décrit par le point (E, E') en se rabattant : mais il est clair que le point G sera le rabattement de (E, E'); donc l'angle COG sera l'angle plan demandé.

Pl 53. Fig. 5. Connaissant les trois angles plans AOB, BOC, COG, les deux autres angles inconnus s'obtiendront par la solution du problème précédent.

668. *Exécution de l'épure.* Pour que la fig. 5 ne soit pas semblable à la fig. 3, nous avons tracé la ligne OG, qui forme l'angle demandé COG, au moyen de lignes mixtes.

669. PROBLÈME 3. *Etant donnés deux angles plans d'un angle solide trièdre, et l'angle dièdre adjacent à l'un d'eux, trouver l'autre angle plan et les deux autres angles dièdres.*

Soit AOB, BOC, les deux angles plans donnés, et la droite AB ayant été menée perpendiculairement à AO, soit B'AB l'angle dièdre donné, supposé adjacent à AOB.

Nous concevrons un plan par les droites AO, (AB, AB'), et ce sera évidemment celui du troisième angle plan demandé. Nous imaginerons ensuite que l'angle BOC tourne autour de l'arête OB ; la droite OC engendrera, dans le mouvement de cet angle, une surface conique droite qui coupera en général le plan mené par AO et par (AB, AB') suivant deux droites : or, il est évident que chacun des angles de ces droites et de la ligne AO sera l'angle plan cherché ; d'où l'on voit que le problème proposé présente deux solutions.

Pour les obtenir, il s'agira donc de déterminer les intersections du plan mené par AO, et par (AB, AB'), avec le cône décrit par la droite CO, et de construire les angles que formeront ces intersections avec la ligne AO. Or, si l'on coupe ces deux surfaces par le plan CD, mené perpendiculairement à BO par le point B, où se coupent AB et BO, on obtiendra pour sections, premièrement, avec le cône, le cercle (CD, CFG) décrit par le point C autour du point B ; secondement, avec le plan, la droite menée par le point D et par le point qui se projette horizontalement en B et verticalement en B' et B'', laquelle droite se rabat autour de CD en DB''. Ces sections (CD, DB''), (CD, DFG), se couperont en deux points F et G, et les angles des droites menées par ces points et par le point O, avec la droite AO, seront les angles cherchés. Si donc on fait attention que les points F et G sont à une distance OC du point O, et qu'ils sont éloignés du point D des distances DF et DG, on verra qu'en décrivant du point D comme centre, avec les rayons DF et DG, les arcs FMI, GNK, puis du point O comme centre, avec le rayon OC, l'arc CLKI, ce dernier coupera les deux premiers en deux points I et K, qui donneront les angles plans cherchés DOI, DOK.

Connaissant les trois angles plans AOB, BOC, DOI, ou AOB, BOC, DOK, on saura trouver les angles dièdres demandés (665). Pl. 53. Fig. 6.

670. *Exécution de l'épure.* Pour que l'on ne confonde pas les données et les résultats, nous avons tracé les données AOB, BOC, B'AB, en lignes pleines, et les côtés OI, OK, des valeurs AOI, AOK, de l'angle plan demandé, en lignes mixtes.

671. *Remarque.* Nous ferons observer en passant, que les données d'un angle solide trièdre en déterminent toujours deux, symétriques l'un de l'autre. Dans les figures 3 et 4, le second angle s'obtiendrait en réunissant les arêtes OA, OD, au-dessous du plan BOC; dans la figure 5, en plaçant l'angle E'BE, au-dessous du plan BOC; enfin, dans la fig. 6, en plaçant l'angle B'AB, au-dessous du plan AOB. Mais deux angles solides trièdres symétriques étant composés des mêmes parties, les solutions précédentes donnent les mêmes résultats, soit que l'on construise l'angle situé au-dessus du plan de la figure, soit que l'on construise celui qui est au-dessous de ce plan. Fig. 3, 4, 5 et 6.

On aura fréquemment occasion, dans la Coupe des pierres, d'appliquer les solutions précédentes.

CHAPITRE IV.

Construction d'un point donné de plusieurs manières dans l'espace.

672. PROBLÈME 1er. *Trois plans A,B,C, étant donnés, et connaissant les distances m, n, p, d'un point à ces trois plans, construire la position de ce point.*

Il est clair que si l'on mène deux plans *a* et *a'*, parallèles au plan A, et distans de ce plan de la longueur *m*, le point demandé sera sur l'un de ces plans. Si de même on mène deux plans *b* et *b'*, parallèles au plan B, et distans de ce plan de la longueur *n*, le même point demandé sera aussi sur l'un des plans *b* et *b'*. Or, les plans *a* et *a'*, *b* et *b'*, se couperont suivant quatre droites, faciles à déterminer, qui contiendront évidemment le point

cherché : mais ce point sera aussi sur deux plans c et c', menés parallèlement au plan C, à des distances de ce plan égales à la longueur p; donc il sera l'un des huit points suivant lesquels les deux plans c et c' couperont les quatre droites intersections des plans a et a' d'une part, b et b' d'autre part.

Ainsi, le problème proposé présente huit solutions. Comme il sera facile de les obtenir, nous ne nous arrêterons pas à leur construction.

673. *Problème* 2. *Trois points* A, B, C, *étant donnés, et connaissant leurs distances* m, n, p, *à un quatrième point, on demande ce dernier point.*

Il est évident que le point cherché sera sur trois sphères qui auront pour centres les points A, B, C, et pour rayons les distances m, n, p, correspondantes à ces points; donc il sera leur intersection commune. Or, deux de ces sphères se couperont suivant un cercle, et ce cercle aura deux points communs avec la troisième sphère; donc le problème proposé aura en général deux solutions. D'après ce qu'on a vu n° 655, il sera aisé de les construire.

Nous ferons observer que si la somme de deux quelconques des distances m, n, p, n'excédait pas l'éloignement des centres des sphères correspondantes, ces sphères ne se couperaient pas, et la question proposée se trouverait impossible.

674. *Problème* 3. *Étant données trois lignes droites* A, B, C, *et les distances* m, n, p, *d'un point à ces lignes, on demande de construire la position de ce point.*

Concevons qu'on mène dans l'espace une droite parallèle à la droite A, et distante de cette dernière d'une longueur m; puis imaginons qu'on fasse tourner la droite menée, autour de la droite A prise pour axe de révolution : il est clair que la droite mobile engendrera une surface cylindrique droite qui aura tous ses points à la distance m de la droite A. Il y aura pareillement deux autres surfaces cylindriques droites qui, ayant les droites B et C pour axes, contiendront tous les points de l'espace éloignés de ces axes des longueurs respectives n et p; donc le point demandé sera l'intersection de trois surfaces cylindriques droites.

Pl. 51. Fig. 3. 675. Soit (EF, E'F') une des lignes droites données, et GH la distance du point cherché à cette droite; il s'agira d'abord de représenter la surface cylindrique droite correspondante à (EF, E'F'). Pour cela, nous remarque-

rons que la trace horizontale de cette surface est une ellipse dont le centre est le point E, où la droite (EF, E'F') perce le plan horizontal, et que le petit axe de cette ellipse est une droite IK perpendiculaire à EF et double de GH. Pour avoir les extrémités du grand axe, nous construirons les élémens de la surface cylindrique situés dans le plan EF : ces élémens seront deux droites parallèles à (EF, E'F'), et distans de cette droite de la longueur GH. Si donc on rabat le plan EF sur le plan horizontal, autour de sa trace EF, la droite (EF, E'F') se rabattra en EP, et si l'on mène NO perpendiculaire à EP, et qu'on prenne QO = QN = GH, puis qu'on mène les droites OM, NL, parallèles à EP, ces droites seront évidemment les rabattemens des élémens en question, et les points L et M, où ces élémens percent le plan horizontal, détermineront le grand axe cherché LM. Pl. 51. Fig. 3.

Connaissant les quatre points I, M, K, L, on décrira l'ellipse IMKL : elle sera la trace du cylindre droit correspondant à (EF, E'F'), et la représentation de ce cylindre sera facile à exécuter.

676. Lorsqu'on aura représenté les trois cylindres correspondans aux trois droites données, on cherchera les intersections de l'un d'entre eux avec les deux autres; ces intersections se rencontreront suivant certains points, et chacun de ces points sera une solution du problème proposé.

Au lieu d'appliquer ces constructions à un exemple, nous allons généraliser la question et chercher l'intersection de trois cylindres quelconques. Ce nouveau problème se résoudra comme celui qui nous occupe, et le choix des données favorables à l'épure sera un peu plus facile que dans ce dernier.

677. PROBLÈME 4. *Un point étant situé sur trois surfaces cylindriques données, on demande les intersections de ces surfaces et la position de ce point.*

Prenons pour traces horizontales des trois surfaces données les ellipses DEF, GHK, LMN, et soient (P*d*, P D'), (P*a*, P'*a*'), (P*b*, P'*b*'), les directions des élémens de ces surfaces : elles seront déterminées. Pour les désigner facilement, nommons A celle dont la trace est DEF, et dont les élémens sont parallèles à (P*d*, P'D'); nommons B celle dont la trace est GHK, et dont les élémens sont parallèles à (P*a*, P'*a*'); enfin, nommons C la troisième, dont la trace est LMN, et dont les élémens sont parallèles à (P*b*, P'*b*'). Pl. 54.

Ayant mené par un point quelconque (P, P') de l'espace trois droites (P*d*, P'D'), (P*a*, P *a*'), (P*b*, P'*b*'), respectivement parallèles aux élémens des cylindres donnés, on construira les points *d*, *a*, *b*, où ces droites percent le plan horizontal, et l'on aura les directions *da*, *db*, *ab*, des traces des plans auxiliaires par lesquels il convient de couper ces cylindres (455) pour obtenir leurs intersections.

678. Ces directions étant trouvées, on menera les droites OQ et O'Q', RS et R'S', T''W et T''W', et l'on saura, premièrement, que le cylindre A pénètre le cylindre B suivant

Pl. 54 une courbe composée de deux branches fermées; secondement, que le cylindre A coupe le cylindre C suivant une branche unique d'arrachement; troisièmement enfin, que les cylindres B et C se coupent aussi suivant une branche unique d'arrachement (464).

On construira ces intersections par les procédés que nous avons exposés (455—460), et l'on obtiendra, savoir : pour intersection de A et B, les lignes (TUVX, T'U'V'X') et (iYZI, i'Y'Z'I'); pour intersection de A et C, la ligne (*ielfghklmi*, *i'e'l'f'g'h'k'l'm'i'*); et enfin, pour intersection de B et C, la ligne (I*inopqrst*I, I'*i'n'o'p'q'r's't'*I').

Connaissant ces trois intersections, les points (*i*, *i'*), (I, I'), où elles se coupent toutes trois, seront déterminés. Il est aisé de voir que dans le cas pris pour exemple le problème proposé aura deux solutions.

679. Mais comme la complication de la figure peut empêcher de distinguer bien clairement les points où ces courbes se coupent, il sera bon de savoir vérifier si un point donné (*i*, *i'*) est en effet sur les trois cylindres donnés. Pour cela, on menera par ce point les trois élémens (E*i*, E'*i'*), (G*i*, G'*i'*), (M*i*, M'*i'*), et l'on remarquera qu'en supposant que le point (*i*, *i'*) soit à la fois sur les trois surfaces A, B, C, les trois plans menés par ces élémens, pris deux à deux, seront des plans auxiliaires : d'où l'on voit que les droites EG, EM, GM, menées par les points E, G, M, où ces mêmes élémens rencontrent les bases A, B, C, devront être (comme elles le sont véritablement) parallèles à *da*, *db* et *ab*. Le même moyen de vérification étant appliqué au point (I, I'), on trouvera que les élémens (FI, F'I'), (HI, H'I'), (NI, N'I'), percent le plan horizontal en trois points N, H, F, des ellipses A, B, C, et que les droites FH, FN, HN, sont parallèles à *da*, *db*, *ab*. Nous conclurons de là que les points (*i*, *i'*), (I, I'), sont bien les points demandés.

680. *Exécution de l'épure.* Quand on aura obtenu l'intersection de deux des trois cylindres donnés, on déterminera les parties de cette intersection qui seraient vues, si ces deux cylindres existaient seuls dans l'espace. Et comme l'introduction du troisième cylindre dans le système ne peut que cacher des parties vues, mais non pas rendre visibles des parties cachées, on connaîtra déjà beaucoup de ces dernières parties, et il ne s'agira plus que de distinguer parmi les arcs vus, de l'intersection de deux cylindres, les parties de ces arcs cachés par le troisième.

La recherche de ces parties demandera de la sagacité. Toutefois, en faisant attention que pour que le troisième cylindre cache une partie de l'intersection des deux autres, il faut, ou que ce troisième cylindre soit au-dessus ou en avant de cette partie, ou qu'il la contienne, on sortira aisément des difficultés de cette recherche. En effet, le troisième cylindre coupant le premier et le second suivant des courbes trouvées, il sera toujours facile de savoir, par le moyen de ces courbes, comment il sera situé par rapport à une partie de l'intersection des deux autres, en sorte que la question sera ramenée à des considérations fort simples. C'est ce que l'application va achever d'éclaircir. Commençons par la projection horizontale.

681. *nop* est l'arc vu de l'intersection des surfaces B et C: cet arc ne sera pas caché par la surface A; car étant projeté au dehors de la projection de cette surface, il ne peut ni être renfermé en elle, ni situé au-dessous d'elle.

L'arc *mie* de l'intersection de A et C serait vu, en faisant abstraction de la susface B; mais il est clair que le cylindre A est au-dessous de cette surface à partir du contour *uv*,

qu'il la pénètre suivant *i*YZI, et qu'il n'en sort que suivant la courbe TUVX, située au-delà de l'arc *mie* : donc cet arc tout entier est caché par la surface B, soit comme étant au-dessous d'elle, soit comme étant renfermé par elle. Pl. 54.

Quant à l'arc (TUV, T'U'V'), de l'intersection de A et B, il est au-delà de la courbe (*ie*I*fghklmi*, *i'e'*I'*f'g'h'k'l'm'i'*), suivant laquelle se coupent A et C; donc il est au-dessus de la surface C; donc il ne peut être caché par cette surface : donc enfin il est vu, car il correspond à des élémens vus de A et B (465).

682. Pour la projection verticale, on remarquera qu'en faisant abstraction de la surface B, l'arc *g'f'*I' de l'intersection de A et C est vu : et comme les surfaces A et C n'entrent dans la surface B qu'à partir des arcs I'Z'Y', *t'*I'*i'*, on en conclura que l'arc *g'f'*I' ne cesse d'être vu qu'au point I'.

Les mêmes considérations feront voir que les arcs *t'*I'*i'*, I'Z'Y', le premier intersection de C et B, et le second intersection de A et B, ne cessent d'être vus, par l'interposition des surfaces respectives A et C, auxquelles ils n'appartiennent pas, qu'à partir du point I'.

683. Pour rendre ce qui précède plus intelligible, nous avons marqué en lignes mixtes les arcs des intersections demandées qui seraient vus, si l'on faisait abstraction de la surface à laquelle ils n'appartiennent pas. Ceux qui ne sont vus dans aucun cas sont d'ailleurs en lignes ponctuées, et ceux qui sont vus sur les trois surfaces sont en lignes pleines.

684. Avant de passer à un autre problème, nous ferons remarquer que lorsqu'un des points demandés n'est pas vu sur une projection, il est nécessairement l'intersection de trois arcs cachés. Ainsi, les trois points I, *i*, *i'*, sont les intersections d'arcs cachés, *i*I*t*, *f*I*e*, *i*IZ, pour le premier; Y*i*I, *mie*, *ni*I, pour le second; et Y'*i'*I', *m'i'e'*, *n'i'*I', pour le troisième.

De même le point vu I' est l'intersection des arcs vus Y'Z'I', *s't'*I', *g'f'*I'. Mais il est clair que ces arcs cessent d'être vus au point I', parce qu'ils appartiennent à des courbes qui entrent, à partir de ce point, dans la surface à laquelle elles n'appartiennent pas.

Nous ferons remarquer encore que si les arcs TUV, *hkl*, passent par les points I et *i*, ce ne peut être que par un hasard que les données présentent.

685. *Problème 5. Un ingénieur parcourant un pays de montagnes est muni d'une carte topographique sur laquelle sont exactement marquées les projections des différens points du terrain, et les cotes qui indiquent les hauteurs de ces points au-dessus d'une même surface de niveau. Il rencontre un point remarquable qui n'est pas sur la carte. L'ingénieur ne porte avec lui d'autre instrument qu'un graphomètre propre à mesurer les angles, et cet instrument est garni d'un fil-à-plomb.*

On demande que, sans quitter la station, il construise sur la carte la position du point où il est, et qu'il trouve la cote qui convient à ce point, c'est-à-dire sa hauteur au-dessus de la surface de niveau.

« Parmi les points du terrain marqués d'une manière précise sur la carte, et qui seront les plus voisins, l'ingénieur en distinguera trois, dont deux au moins ne soient pas à la même hauteur que lui; puis il observera les angles formés par la verticale et les rayons visuels dirigés à ces trois points; et d'après cette seule observation il pourra résoudre la question.

» En effet, nommons A, B, C, les trois points observés, dont il a les projections horizontales sur la carte, et dont il pourra construire les projections verticales au moyen de leurs cotes. Puisqu'il connait l'angle formé par la verticale correspondante à la station, et par le rayon visuel dirigé au point A, il connaît aussi l'angle formé par le même rayon et par la verticale élevée au point A : car en négligeant la courbure de la terre, ce qui est convenable, ces deux angles sont alternes internes, et par conséquent égaux. Si donc il conçoit une surface conique à base circulaire, dont le sommet soit au point A, dont l'axe soit vertical, et dont l'angle formé par l'axe et par la droite génératrice soit égal à l'angle observé, ce qui détermine complètement cette surface, elle passera par le rayon visuel dirigé au point A, et par conséquent par le point de la station : ainsi, il aura une première surface courbe déterminée, sur laquelle se trouvera le point demandé. En raisonnant pour les deux autres points B, C, comme pour le premier, le point demandé se trouvera encore sur deux autres surfaces coniques à bases circulaires, dont les axes seront verticaux, dont les sommets seront aux points B, C, et pour chacune desquelles l'angle formé par l'axe, et par la génératrice, sera égal à l'angle formé par la verticale et par le rayon visuel correspondant. Le point demandé sera donc en même temps sur trois surfaces coniques déterminées de forme et de position, et par conséquent dans leur intersection commune. Il ne s'agit donc plus que de construire, d'après les données de la question, les projections horizontales et verticales des intersections de ces trois surfaces considérées deux à deux; les intersections de ces projections donneront les projections horizontale et verticale du point demandé, et par conséquent la position de ce point sur la carte, et sa hauteur au-dessus ou au-dessous des points observés, ce qui déterminera sa cote.

» Cette solution doit en général produire huit points qui satisfont à la question; mais il sera facile à l'observateur de distinguer parmi ces huit points, celui qui coïncide avec le point de la station. D'abord il pourra toujours s'assurer si le point de la station est au-dessus ou au-dessous du plan qui passe par les trois points observés. Supposons que ce plan soit au-dessus du plan des sommets des cônes; il sera autorisé à négliger les branches des intersections des surfaces coniques qui existent au-dessous de ce plan; par là, le nombre des points possibles sera réduit à quatre. Ce serait la même chose, si le point de station était au contraire placé au-dessous du plan. Ensuite, parmi ces quatre points, s'ils existent tous, il reconnaîtra facilement celui dont la position, par rapport aux trois sommets, est la même que celle du point de la station, par rapport aux points observés. »

Si l'on veut un exemple, on le trouvera dans la *Géométrie descriptive* de M. Monge, d'où ce problème est extrait.

686. PROBLÈME 6. « *Les circonstances étant les mêmes que dans la question précédente, avec cette seule différence que l'instrument n'est pas garni de fil-à-plomb, de manière que les angles avec la verticale ne puissent pas être mesurés, on demande encore que l'ingénieur, sans quitter la station, détermine sur la carte la position du point où il est, et qu'il trouve la cote de ce point, c'est-à-dire son élévation au-dessus de la surface de niveau à laquelle tous les points de la carte sont rapportés.*

» Après avoir choisi trois points du terrain qui soient marqués d'une manière précise sur la carte, et tels que le point de station ne soit pas avec eux dans le même plan, l'ingé-

nieur mesurera les trois angles que forment entre eux les rayons visuels dirigés à ces trois points; et au moyen de cette seule observation, il sera en état de résoudre la question.

» En effet, si nous nommons A, B, C, les trois points observés, et si on les suppose joints par les trois droites AB, BC, CA, l'ingénieur aura les projections horizontales de ces droites tracées sur la carte; de plus, au moyen des cotes des trois points, il aura les différences de hauteur des extrémités de ces droites; il pourra donc avoir la grandeur de chacune d'elles. Pl. 55.

» Cela posé, si dans un plan quelconque, mené par AB, on conçoit un triangle rectangle BAD, construit sur AB comme base, et dont l'angle en A soit le complément de l'angle sous lequel le côté AB a été observé, l'angle en D sera égal à l'angle observé, et la circonférence de cercle décrite par les trois points A, B, D, jouira de la propriété que si d'un point quelconque W, de l'arc ADB, on mène deux droites aux points A et B, l'angle en W qu'elles comprendront entre elles, sera égal à l'angle observé. Si donc on conçoit que le plan du cercle tourne autour de AB comme charnière, l'arc ADB engendrera une surface de révolution dont tous les points jouiront de la même propriété; c'est-à-dire que si d'un point quelconque de la surface on mène deux droites aux points A et B, ces droites formeront entre elles un angle égal à l'angle observé. Or, il est évident que les points de cette surface de révolution sont les seuls qui jouissent de cette propriété; donc la surface passera par le point de la station. Si l'on raisonne de la même manière pour les deux autres droites BC, CA, on aura deux autres surfaces de révolution, sur chacune desquelles se trouvera le point de la station; ce point sera donc en même temps sur trois surfaces de révolution différentes, déterminées de forme et de position; il sera donc un point de leur intersection commune. »

687. Chacune de ces surfaces aura deux nappes distinctes, l'une engendrée par l'arc ADB, capable d'un des angles observés, et l'autre engendrée par l'arc AwB, capable du supplément de cet angle. Or, généralement, chaque nappe d'une de ces surfaces de révolution peut être coupée par une nappe de l'une des deux autres surfaces suivant deux branches de courbe; donc la ligne d'intersection de deux de ces surfaces est en général composée de huit branches. Mais une de ces branches peut couper une nappe de la troisième surface en quatre points; donc les deux nappes de cette dernière surface peuvent rencontrer les huit branches de l'intersection en soixante-quatre points.

Tous ces points ne satisfont pas à la question proposée : en effet, l'arc AwB n'étant pas capable d'un des angles donnés, mais bien du supplément de cet angle, la nappe de surface qu'il engendre, et que nous appellerons *nappe supplémentaire*, ne peut contenir le point demandé. D'après cela, chacune des surfaces données n'a qu'une nappe qui puisse conduire à la solution cherchée, ce qui réduit le nombre des branches de courbe, qui peuvent contenir le point à construire, à deux; et le nombre des solutions du problème, à huit.

De ces huit solutions, quatre seront d'un côté du plan des trois points donnés, et les quatre autres du côté opposé, en sorte que l'observateur, qui saura toujours de quel côté de ce plan il se trouve placé, n'aura véritablement que quatre points d'intersection à construire. Et parmi ces quatre points, s'ils existent tous, il reconnaîtra facilement celui qui sera situé, par rapport aux points A, B, C, de la même manière que celui de la station, par rapport aux points du terrain qu'il a observés.

Pl. 55. 688. Pour appliquer ce qui précède, prenons pour plan horizontal le plan des trois points donnés, et pour plan vertical un plan perpendiculaire à une droite menée par deux de ces points.

Soient donc (A, *a*), (B, *b*), (C, *a*), ces trois points, et ADB, AEC, BFC, les trois arcs horizontaux capables des angles observés. Nous concevrons que ces arcs tournent respectivement autour des cordes AB, AC, CB, qui les soutendent, et ils engendreront les surfaces de révolution ADBG, AECH, BFCI, dont il s'agit de construire les points d'intersection.

Cherchons la ligne suivant laquelle se coupent les deux surfaces dont AC et BC sont les axes. D'après ce qu'on a vu précédemment (489), il conviendra pour cela de couper ces deux surfaces par des sphères concentriques dont le centre soit en (C, *a*). Une quelconque *mnrsuv*, de ces sphères, coupera ces deux surfaces suivant deux cercles qui auront pour intersection des points de la ligne cherchée. Or, ces cercles se projetteront horizontalement en *xs* et *nu*, et le dernier se projettera verticalement en *n'y'u'y"*; d'où l'on voit qu'ils se couperont suivant les points (*y*, *y'*) et (*y*, *y"*).

En menant de nouvelles sphères concentriques à la sphère *mnrsuv*, on obtiendra de nouveaux points, tels que (*y*, *y'*), (*y*, *y"*), et l'on en déduira l'intersection (C*def*, *f'*V*e'y'd'a*...*ad"y"e"*Z*f"*).

On construira de même l'intersection (A*gef*, *f'e'g'a'*...*ag"e"f"*), des deux surfaces dont AB et AC sont les axes. Cette intersection coupera la ligne (C*def*, *f'*V*e'y'd'a*...*ad"y"e"*Z*f"*) suivant les points (*e*, *e'*), (*e*, *e"*), (*f*, *f'*), (*f*, *f"*), entre lesquels il ne s'agira plus que de reconnaître le point de la station : ce qui, comme nous l'avons déjà dit, sera toujours facile.

689. Si nous nous étions seulement proposé de construire cette station, nous n'aurions déterminé que les parties des projections verticales des intersections C*def*, A*gef*, situées du côté du plan *ab* où elle se trouve, et nous n'aurions même eu besoin que de l'une des projections verticales *f'*V*e'y'd'a*...*ad"y"e"*Z*f"*, *f'e'g'a*...*ag"e"f"*; car ayant les projections horizontales *e* et *f* des points cherchés, une seule des lignes *f'*V*e'y'd'a*...*ad"y"e"*Z*f"*, *f'e'g'a*...*ag"e"f"*, suffit pour déterminer leurs projections verticales *e'*, *f'*, *e"*, *f"*.

Mais nous avons voulu représenter les intersections complètes de la surface engendrée par la circonférence entière AEC*r*, avec les surfaces engendrées par les circonférences ADB*w*, BFC*q*.

690. La même sphère *mnrsuv*, qui nous a donné les points d'intersection des nappes décrites par les arcs BFC, AEC, donne des points de toutes les branches de l'intersection complète. En effet, cette sphère coupe la surface AECH suivant les deux cercles *nu*, *rt*, et la surface BFCI suivant les deux cercles *xs*, *pq*; ces quatre cercles sont dans quatre plans, qui se rencontrent suivant quatre droites, projetées horizontalement en quatre points *y*, *k*, *z* et *l*. Le premier *y* est la projection de deux points (*y*, *y'*), (*y*, *y"*), de l'intersection des nappes principales; le second *k*, appartenant à l'intersection des plans des cercles *rt*, *pq*, correspond à la projection horizontale de l'intersection des nappes supplémentaires décrites par les arcs A*r*C, B*q*C; le troisième *z* appartient à l'intersection de la nappe principale, décrite par l'arc BIC, avec la nappe supplémentaire décrite par l'arc A*r*C; enfin le quatrième *l*, qui est sur l'intersection des plans des cercles *nu*, *pq*, correspond à l'intersection

de la nappe principale décrite par AEC, avec la nappe supplémentaire décrite par B*q*C. Pl. 55.

691. En général, chaque point *y*, *k*, *z*, *l*, correspondra à deux points de l'intersection cherchée, l'un situé au-dessus du plan *ab*, et l'autre situé au-dessous : c'est ce qui a lieu pour les points *y* et *z*, auxquels correspondent les points (*y*, *y'*) et (*y*, *y"*), (*z*, *z'*) et (*z*, *z"*). Mais il pourra se faire aussi que les deux points tels que (*y*, *y'*), (*y*, *y"*), se réunissent dans le plan *ab*, et dans ce cas le point *y* ne donnera qu'un seul point de l'intersection cherchée. Il pourra même arriver qu'un ou plusieurs des points obtenus, *y*, *k*, *z*, *l*, ne fournissent aucun point de cette intersection; et c'est ce qui a lieu, comme on va le voir, pour les points *k* et *l*.

Effectivement, le point *k* doit appartenir à l'intersection des nappes A*r*C*t*, B*p*C*q* ; mais il est projeté au dehors de ces nappes : donc il ne peut correspondre à aucun point de la ligne suivant laquelle ces nappes se coupent. Il en est de même du point *l*, qui se trouve projeté au dehors des nappes B*p*C*q*, AECH.

Les cercles *rt* et *pq*, *nu* et *pq*, ne s'étendant pas jusqu'aux droites *k* et *l*, suivant lesquelles leurs plans se coupent, on dit que les intersections de ces cercles sont *imaginaires*, et que les points *k* et *l*, où se projetteraient ces intersections, si elles étaient *réelles*, c'est-à-dire si elles existaient, répondent à des parties des intersections des nappes A*r*C*t* et B*p*C*q*, B*p*C*q* et AECH, qui sont *imaginaires*. Sous ce rapport, les points *y* et *z* répondent à des parties *réelles* de l'intersection cherchée.

692. Si l'on mène de nouvelles sphères auxiliaires, telles que *mnrsuv*, et que l'on classe avec soin les points qu'elles donneront pour chaque branche de la ligne d'intersection des deux surfaces dont AC et BC sont les axes, on pourra bientôt décrire facilement cette ligne. Voici les parties qui la composent : 1°. la branche (C*dyefi*, *ad'y'e'*V*f'f"*Z*e"y"d"a*) d'intersection des nappes principales engendrées par BFC et AEC; 2°. la branche (C*m'j*, *am"j'v'a*) d'intersection des deux nappes supplémentaires C*p*B*q*, C*r*A*t*; 3°. la partie imaginaire projetée horizontalement en *jkh'c'*; 4°. la branche (*c'zb'*C, *ab"z'c"z"b"'a*) d'intersection de la nappe principale engendrée par BFC avec la nappe supplémentaire C*r*A*t*; 5°. la branche (C*a'*, *ak'a"l'a*); 6°. enfin, la partie imaginaire projetée horizontalement en *d'u"i*.

On trouvera de même que les deux surfaces dont AB et AC sont les axes, se coupent, 1°. suivant la branche (A*g*K*efh*, *ag'e'f'f"e"g"a*); 2°. suivant la branche (A*i"i'*, *ak"l'h"j"a*); 3°. suivant la partie imaginaire projetée horizontalement en *i'o"o*; 4°. suivant la branche (*op'*, *o'q'p"q"*); 5°. suivant la partie imaginaire projetée horizontalement en *p'r"*A*s's"h*.

Ces deux intersections se rencontreront en douze points, et si l'on détermine la ligne suivant laquelle se coupent les surfaces dont BA et BC sont les axes, on trouvera que cette ligne passe par ces douze points. Pour les rendre bien apparens, on a mené par chacun d'eux un petit arc de l'intersection des surfaces décrites autour de BA et de BC.

693. *Exécution de l'épure.* Les arcs *g*K*e*, *dye*, *ce*, sont les seuls, des intersections des trois surfaces données, qui soient vus sur la projection horizontale. Comme ils contribuent beaucoup à donner l'idée de la situation de ces surfaces les unes par rapport aux autres, il était nécessaire que le dernier *ce* fût marqué sur l'épure. Il se construit comme l'arc *dye*, dont nous nous sommes occupés.

Pl. 55. Quant au contour des projections horizontales des mêmes surfaces, il est aisé de les déterminer et d'en distinguer les parties vues et cachées.

Nous avons marqué sur la projection verticale ceux, LMNOP de la nappe principale qu'engendre l'arc ADB, QQ'RR' de la nappe supplémentaire engendrée par l'arc AwB; VXYZ de la nappe principale engendrée par AEC, et SS'TU de la nappe AtCr. Les contours des nappes de la surface décrite autour de BC auraient trop fortement compliqué la figure : nous ne les avons pas décrits.

Les seuls arcs des intersections construites vus, en projection verticale, sont les arcs M$g'a$, ag''O. Il est clair qu'ils touchent le contour LMNOP aux points M et O, où ils cessent d'être vus.

Nous avons tracé les arcs $jkh'c'$, $a'u''i$, $i'o''o$, $p'r''$A$s's''h$, qui répondent à des parties imaginaires des intersections demandées, au moyen de lignes ordinaires de construction.

LIVRE VI.

COMPLÉMENT

de la théorie des Lignes courbes et des Surfaces courbes.

CHAPITRE PREMIER.

Des Surfaces gauches.

694. Nous avons examiné, chap. III, liv. II, les deux principaux genres des surfaces gauches ; mais comme nous n'étions pas encore familiarisés avec les plans tangens et avec les intersections de surfaces, nous avons dû nous borner à la partie la plus élémentaire de la matière que nous traitions : aussi nous sommes-nous contentés d'indiquer sommairement (242) les générations des surfaces gauches dont nous ne pouvions pas nous occuper. Nous allons compléter ici la théorie de ces surfaces, et nous commencerons par démontrer deux théorèmes qui nous conduiront à la solution générale du problème du plan tangent.

695. *Théorème* 1er. *Si deux surfaces gauches* S *et* Σ *ont un même plan directeur, un élément* E *commun, et deux plans tangens communs dont les points de contact m et m′ soient sur l'élément* E, *ces deux surfaces seront tangentes entre elles tout le long de cet élément.*

Pour démontrer cette propriété, concevons par les points de contact m et m' deux plans sécans quelconques P et P′. Ces plans couperont la surface S suivant deux courbes d et d', et la surface Σ suivant deux autres courbes δ et δ'. Imaginons que l'on prenne pour directrices de la première surface S, les lignes d et d', et pour directrices de la seconde Σ les lignes δ et δ'. Les deux surfaces étant tangentes entre elles en m et m', elles auront deux facettes communes, que nous nommerons aussi m et m' : or, la facette m, soit qu'elle appartienne à la surface S, soit qu'elle appartienne à la surface Σ, ne pourra être coupée par le plan P que suivant un élément linéaire unique k, qui appartiendra tout-à-la-fois aux

deux courbes d et δ; d'où il suit que ces courbes seront tangentes entre elles en m. On peut démontrer de même que les lignes d' et δ' se toucheront suivant un élément linéaire k' de la facette m'. Et si l'on se figure que la génératrice de la surface S se meuve sur les courbes d et d', prises pour directrices, il est clair qu'auprès de l'élément E, cette génératrice s'appuiera sur les lignes infiniment petites k et k' : et comme ces lignes appartiennent aux courbes δ et δ', tout aussi bien qu'aux courbes d et d', la zone de la surface gauche, engendrée proche de l'élément E, sera commune aux surfaces S et Σ; donc, etc.

696. *Théorème* 2. *Quelles que soient deux surfaces gauches* S et Σ, *lorsqu'elles ont un élément commun* E, *et trois plans tangens communs dont les points de contact m, m', m'', sont sur cet élément, elles sont tangentes entre elles tout le long du même élément.*

La démonstration de ce théorème est tout-à-fait analogue à celle du théorème précédent.

Concevons par les points m, m', m'', trois plans sécans quelconques P, P′, P″. Soient d, d', d'', les courbes suivant lesquelles ils couperont la surface S, et δ, δ', δ'', les courbes suivant lesquelles ils couperont la surface Σ. Ces deux surfaces étant tangentes entre elles en m, m' et m'', il est facile de voir que les courbes d et δ, d' et δ', d'' et δ'', se toucheront deux à deux suivant des lignes infiniment petites k, k' et k''. Cela posé, faisons mouvoir la génératrice de la surface S sur les lignes d, d' et d'', prises pour nouvelles directrices; il est clair qu'auprès de l'élément E cette génératrice s'appuiera sur les lignes k, k' et k'' : et comme ces lignes appartiennent tout-à-la-fois aux courbes d et δ, d' et δ', d'' et δ'', la zone de surface engendrée le long de l'élément E sera commune aux deux surfaces S et Σ; donc, etc.

697. *Problème général. Étant donné une surface gauche quelconque et un point d'un de ses élémens, on demande le plan tangent à la surface en ce point.*

Pour résoudre ce problème, on menera par l'élément K, qui contient le point de contact donné, trois plans quelconques P, P′, P″; on construira les courbes d'intersection de ces plans avec la surface gauche; on déterminera les points m, m', m'', où l'élément K coupera ces courbes, et ces points seront ceux où les plans P, P′, P″, seront tangens à la surface donnée (245).

Si donc l'on mène par les points m, m', m'', dans les plans respectifs P, P', P'', trois lignes droites quelconques, et que l'on prenne ces lignes pour directrices d'un hyperboloïde à une nappe, cet hyperboloïde touchera la surface donnée tout le long de l'élément K (696). D'où l'on voit que pour avoir le plan tangent demandé, il ne s'agira que de mener par le point de contact donné un plan tangent à l'hyperboloïde : question que l'on sait résoudre (326).

Cette solution, purement graphique, s'applique comme on le voit à toute espèce de surface gauche, même à celles dont les générations seraient inconnues, pourvu que l'on ait un nombre suffisant de leurs élémens.

698. Si la surface donnée avait un plan directeur, c'est-à-dire si ses élémens étaient parallèles à un même plan, la solution précédente pourrait être simplifiée; parce qu'au lieu de prendre l'hyperboloïde à une nappe pour surface auxiliaire, on pourrait, ainsi qu'on va le voir, employer le paraboloïde hyperbolique.

Par l'élément K, concevons que l'on ait mené deux plans quelconques P et P', et imaginons que l'on ait construit les points m et m', où ils toucheront la surface gauche. Par ces points et dans les plans respectifs P et P', on menera deux droites quelconques, et si l'on prend ces droites pour directrices d'une paraboloïde hyperbolique qui ait pour plan directeur celui de la surface donnée, le paraboloïde et cette surface se toucheront tout le long de l'élément K (695) : si donc on mène par le point de contact donné un plan tangent à ce paraboloïde (317), ce plan sera le plan demandé.

Ces constructions seront beaucoup plus faciles que dans le cas général, mais elles seront encore d'un emploi fort pénible.

699. Dans les cas usuels, on peut choisir un ou plusieurs des plans de construction P, P', P'', de manière que leurs points de contact m, m', m'', soient immédiatement connus, et les solutions précédentes se trouvent par là considérablement simplifiées. C'est ce que va nous montrer l'examen qui nous reste à faire des différens genres de surfaces gauches qui sont employées dans les arts.

700. DES SURFACES GAUCHES *qui ont un plan directeur et deux surfaces directrices*. Concevons qu'une droite se meuve en restant toujours parallèle à un plan donné et en touchant constamment deux surfaces

données, elle engendrera dans son mouvement une surface gauche; car, à moins qu'il n'y ait entre le plan directeur et les surfaces directrices des relations particulières, deux positions consécutives de la génératrice ne seront pas dans un même plan (214).

701. Le plan directeur et les deux surfaces directrices étant représentés, il sera toujours facile de construire autant d'élémens qu'on en voudra de la surface gauche déterminée par ce plan et par ces deux surfaces. En effet, si l'on mène des plans parallèles au plan directeur, et qu'on cherche les intersections de ces plans et des deux surfaces directrices, il ne s'agira plus que de mener des droites (*voyez* la Note 6) tangentes respectivement à deux intersections comprises dans le même plan, et ces droites seront les élémens de la surface.

702. Chacun de ces élémens touchera chaque surface directrice suivant un point, et la suite des points de contact des élémens formera, sur les deux surfaces directrices, deux lignes qui seront les courbes de contact de ces surfaces et de la surface gauche. Ces deux lignes, substituées aux surfaces directrices, pourraient servir de directrices linéaires à la surface engendrée : mais comme on ne sait pas mener, par des méthodes simples, des tangentes aux courbes de contact (499), ces directrices linéaires n'auraient aucun avantage sur les surfaces directrices, et elles ne seraient même pas propres à la détermination du plan tangent; tandis qu'il se construit aisément, ainsi qu'on va le voir, au moyen de ces surfaces.

703. *Problème 1er. Étant donnée une surface gauche du genre de celles qui ont un plan directeur et deux surfaces directrices, avec un élément de cette surface et un point de cet élément, construire le plan tangent correspondant à ce point.*

Pour cela on menera, par les points où cet élément touchera les deux surfaces directrices, des plans tangens à ces surfaces; par les mêmes points, on menera des droites quelconques dans ces plans, et ces droites seront les directrices d'un paraboloïde hyperbolique tangent à la surface donnée tout le long de l'élément donné (695), en sorte que la recherche du plan tangent demandé sera ramenée au problème du n° 317.

704. Si la surface donnée avait pour directrices une surface et une courbe, au lieu de deux surfaces, c'est-à-dire si l'une des surfaces directrices se réduisait à une ligne, le plan tangent s'obtiendrait de même,

au moyen d'un paraboloïde auxiliaire, et les directrices de ce paraboloïde ne seraient pas plus difficiles à déterminer que dans le cas de deux surfaces directrices. En effet, l'élément passant par le point de contact toucherait la surface directrice en un point, et la directrice linéaire en un autre point; et comme il suffit que le paraboloïde auxiliaire touche la surface donnée en deux points, pour qu'il la touche au point de contact donné (695), on choisirait pour ses directrices, 1°. une droite menée arbitrairement par le premier point, dans le plan tangent correspondant de la surface directrice; 2°. la tangente à la directrice linéaire menée par le second point.

705. On voit donc par là que, soit que la surface donnée ait une surface et une courbe ou deux surfaces pour directrices, on peut toujours choisir le paraboloïde auxiliaire parmi une infinité d'autres; puisque l'une de ses directrices, au moins, se trouve menée par un point dans un plan tangent connu, et dans une direction de ce plan entièrement arbitraire. Cette propriété est d'un assez grand avantage, parce qu'on se détermine pour le choix qui conduit aux constructions les plus simples.

Tout ce qui précède va être éclairci par la solution du problème suivant.

706. PROBLÈME 2. *Étant donnée la surface gauche qui a pour plan directeur le plan horizontal de projection, et pour directrices, 1°. la courbe* (ClH, C'I'H'I''); 2°. *la sphère dont le centre est en* (A, A'), *et dont le rayon est* (AB, A'B'), *on demande, premièrement, de représenter cette surface; secondement, de construire le plan tangent en un point de l'un de ses élémens.* Pl. 56.

D'après ce qu'on a vu précédemment (156), il faudra, pour représenter la surface donnée, construire ses traces, les contours de ses projections, ses lignes singulières, et un nombre suffisant de ses élémens.

707. Pour cela, on commencera par choisir sur la directrice linéaire (ClH, C'I'H'I''), un certain nombre de points (C, C'), (D, D'), (E, E'), etc.; par ces points, on menera des plans parallèles au plan directeur, c'est-à-dire horizontaux; ils couperont la sphère directrice suivant des cercles, et en menant par les points (C, C'), (D, D'), (E, E'), etc., des tangentes à ces cercles, ces tangentes seront les élémens cherchés. Suivons ces constructions pour le point (D, D').

Le plan horizontal mené par ce point aura pour trace verticale la ligne D'*m'*, parallèle à la ligne de terre; et comme cette trace sera la projection de tout ce qui sera contenu dans ce plan, elle sera nécessairement la projection verticale de l'élément cherché. Le plan D'*m'* coupera la sphère directrice suivant un cercle (*omp*, *o'p'*), facile à déterminer;

Pl. 56 par le point D on menera la tangente Dm, à la projection omp de ce cercle, et la droite (Dm, D$'m'$), tangente à la sphère en (m, m'), sera évidemment l'élément demandé.

Le même plan horizontal D$'m'$ coupera la directrice linéaire (CHI, C'I'H'I''), en un second point (G, G'), qui, avec le cercle (omp, $o'p'$), déterminera un second élément (Gn, G'n') de la surface gauche. Cet élément et l'élément (Dm, D$'m'$), étant situés dans le même plan, se couperont en un certain point (n, n').

En prenant sur la directrice linéaire de nouveaux points, sur lesquels on opérera comme on vient d'opérer sur le point (D, D'), on obtiendra de nouveaux élémens de la surface gauche; et si l'on fait attention que le même plan horizontal D$'m'$ contient deux de ces élémens, on verra que cette surface est composée de deux parties, qui se coupent suivant une courbe (hg, $h'g'h''$).

708. Cette courbe est une courbe singulière de la surface donnée; elle est, comme on le voit, l'intersection de la partie de la surface qui correspond à l'arc I'C'I'' de la directrice, avec la partie qui correspond à l'arc I'H'I''. Elle divise cette surface en deux nappes, et il importe qu'elle soit exactement représentée, pour qu'on sente bien comment ces deux nappes sont disposées l'une par rapport à l'autre.

709. Pour rendre la représentation la plus complète possible, on aura soin de construire les élémens extrêmes (Cg, C'g'), (Hg, H'g'), (Ih, I'h'), (Ih, I''h''), parce qu'ils appartiennent aux contours des projections de la surface donnée. Il est clair que ces contours sont, pour la projection verticale, les deux droites I'h', I''h'', et pour la projection horizontale, 1°. les deux droites Cg, Hg; 2°. la courbe thk, qui touche les projections horizontales de tous les élémens de la surface représentée.

Il est remarquable que le plan tangent en un point d'un élément qui sert de contour touche la surface gauche tout le long de cet élément. C'est le cas examiné n° 334.

710. L'épure ne peut présenter aucune trace; car les parties indiquées des élémens ne rencontrent pas le plan horizontal, et leurs intersections avec le plan vertical sont au dehors du cadre.

Pour bien faire sentir la disposition de la surface engendrée, par rapport à la sphère directrice, il sera bon de décrire la courbe (shx, $s'h'x''h''$), qui est le lieu des points tels que (m, m'), où les élémens de la surface gauche touchent la surface sphérique.

711. Enfin, nous ferons observer que la surface en question présente encore deux autres nappes, qui sont produites par une génératrice toujours située en arrière de la sphère directrice. Pour que la figure ne soit pas trop compliquée, nous ferons abstraction de ces deux dernières nappes.

712. Passons actuellement à la construction du plan tangent. Soit (KM, K'M') un élément de la surface, et (M, M') un point de cet élément par lequel on demande de mener le plan tangent.

Le plan horizontal mené par l'élément (KM, K'M') coupe la sphère directrice suivant le cercle (ace, $a'e'$), et le point de contact (a, a'), de ce cercle et de l'élément (KM, K'M'), est celui où ce même élément touche la sphère directrice; donc ce point (a, a') et le point (K, K'), commun à la directrice linéaire et à la droite (KM, K'M'), sont ceux par lesquels il s'agit de mener les directrices du paraboloïde hyperbolique auxiliaire (704).

Celle qui correspondra au point (K, K') sera la droite (KL, K'L'), tangente en (K, K') à

la directrice linéaire; et quant à la seconde, ce sera une droite prise à volonté dans le plan tangent à la sphère en (a, a'). Pl. 56.

Pour obtenir cette seconde directrice, menons d'abord le plan tangent en (a, a'). Cela exigera que nous rabattions le méridien Aa en AB, parallèlement au plan vertical : le point (a, a') viendra se rabattre en (e, e'), et la tangente à la méridienne (AB, uB$'e'v$), en (e, e'), sera la droite $(el, e'l')$, qui perce le plan horizontal en (l, l'). Or, lorsqu'on ramenera le plan AB en Aa, le point (l, l') viendra en q; donc la tangente en (a, a'), à la méridienne Aa, perce le plan horizontal en q. Mais le plan tangent passe par cette tangente ; donc il a pour trace une droite menée par le point q ; et comme il est perpendiculaire au plan méridien, cette droite est nécessairement la perpendiculaire qO, élevée par le point q sur la droite Aa.

Connaissant la trace horizontale qO du plan tangent à la sphère, il ne sera pas nécessaire de chercher sa trace verticale. On prendra sur la droite qO un point (b, b'); on menera par ce point et par le point (a, a') une droite $(ab, a'b')$, et cette droite pourra être choisie pour la deuxième directrice du paraboloïde.

Il ne s'agira donc plus, pour avoir le plan tangent en (M, M') à la surface donnée, que de mener par le point (M, M') du paraboloïde dont (KL, K'L'), et $(ab, a'b')$, sont les directrices, et dont la génératrice est horizontale, un plan tangent à ce paraboloïde (315). Pour cela, on remarquera que la droite (bL, b'L') est l'élément du paraboloïde, situé dans le plan horizontal; on menera par le point (M, M') des droites (MN, M'N'), (MO, M'O'), respectivement parallèles aux directrices (KL, K'L'), $(ab, a'b')$; elles détermineront un plan parallèle à ces directrices; ce plan contiendra l'élément de la seconde génération qui passe par le point (M, M'); il aura pour trace horizontale la droite NO, et il coupera par conséquent l'élément (bL, b'L') suivant le point P. Mais il ne peut couper cet élément que suivant le point où ce même élément est touché par l'élément de la seconde génération; donc le point P appartient à ce dernier élément : donc il appartient au plan tangent demandé.

En menant donc par le point P la droite PQ, parallèle à KM, cette droite sera la trace horizontale de ce plan, et il sera facile d'en déduire sa trace verticale (*).

Nous appliquerons souvent dans la Coupe des pierres et dans la Charpente, cette construction simple et commode du plan tangent aux surfaces gauches qui ont un plan directeur et des surfaces directrices.

713. *Exécution de l'épure.* Nous n'avons pas supposé que le plan tangent demandé existât dans l'espace, et c'est pour cela (56) que nous avons indiqué sa trace PQ au

(*) S'il s'agissait d'avoir le plan tangent en un point (n, n') de la ligne multiple $(hng, h'g'h'')$, on voit que ce point étant à la fois sur deux élémens de la surface, les constructions précédentes conduiraient à deux solutions.

On voit aussi que si l'on connaissait deux courbes sur la surface donnée, l'une située sur la nappe hgCH, l'autre située sur la nappe khgR, et toutes deux passant par un point (n, n') de la ligne multiple $(hng, h'g'h'')$, les tangentes à ces courbes seraient, l'une dans le plan tangent à la première nappe, l'autre dans le plan tangent à la seconde, et que l'ensemble des deux tangentes déterminerait un plan coupant, qui ne serait tangent ni à l'une ni à l'autre nappe, et qui par conséquent ne toucherait pas la surface.

Pl. 56. moyen de lignes mixtes. Par suite de ce qu'il n'est pas censé exister, la détermination des parties vues et cachées de l'épure ne présente aucune difficulté : en conséquence nous ne nous y arrêterons pas, et nous ferons seulement une observation.

C'est qu'en projection verticale, la courbe singulière (hg, $h'g'h''$) divise chaque élément de la surface gauche en deux parties, l'une vue, l'autre cachée, et que cette courbe jouit de la même propriété en projection horizontale, relativement aux élémens qui sont au-dessus du plan B'H'. Il est d'ailleurs évident que, sur cette dernière projection, les autres élémens sont tous cachés.

714. Des surfaces gauches *dont la génératrice touche constamment trois surfaces données*. Concevons dans l'espace une telle surface gauche et ses trois surfaces directrices, et désignons ces dernières par les noms de *première directrice*, *deuxième directrice*, et *troisième directrice*.

Cela posé, montrons d'abord comment on pourrait construire les élémens de la surface donnée, et pour cela, imaginons qu'on veuille avoir l'élément parallèle à un plan donné. On concevra que ce plan soit le plan directeur d'une surface gauche auxiliaire ayant pour directrices deux des trois surfaces directrices données, par exemple, la première et la seconde. Cette surface auxiliaire coupera la troisième directrice suivant une courbe; et je dis que si l'on mène parallèlement au plan donné une tangente à cette courbe (*), cette tangente sera l'élément cherché. En effet, la surface auxiliaire aura un élément passant par le point de contact de cette tangente, puisque ce point sera sur l'intersection de cette surface et de la troisième directrice, et ces deux droites, l'élément et la tangente, seront parallèles à un même plan : de plus, elles seront dans le plan tangent à la surface auxiliaire; donc elles coïncideront entre elles. Mais par cela seul que la tangente en question touchera une courbe située sur la troisième surface directrice, elle sera tangente à cette surface; d'un autre côté, elle touche la première et la seconde surfaces directrices, puisqu'elle coïncide avec un élément de la surface auxiliaire : donc, etc.

Il suit de là qu'en se donnant une suite de plans, on pourra déterminer les élémens parallèles à chacun d'eux, et parvenir à représenter la surface gauche dont il s'agit (248).

715. Lorsque l'une des trois surfaces directrices est une surface développable, il est assez facile de construire les élémens de la surface gauche engendrée; parce qu'un plan tangent quelconque à cette surface développable la touche tout le long d'un de ses élémens, et coupe les deux autres surfaces directrices, chacune suivant une courbe, en sorte que si l'on mène une droite tangente à ces deux courbes (Note 6), cette droite est dans le plan tangent à la surface développable; elle rencontre par conséquent l'élément de contact : d'où il suit qu'elle est tangente aux trois surfaces directrices, c'est-à-dire qu'elle est un des élémens de la surface gauche.

(*) Pour mener parallèlement à un plan donné P une tangente à une courbe connue, il faudra faire une projection auxiliaire φ de cette courbe, sur un plan P' perpendiculaire au plan P : il est clair que la tangente cherchée aura pour projection, sur le plan P', une droite δ parallèle à l'intersection des plans P et P', et tangente à la courbe φ; or cette droite δ sera facile à déterminer (122), et la tangente demandée s'ensuivra.

Il est d'ailleurs assez aisé de voir que l'intersection de la surface auxiliaire, et de la troisième directrice, est une courbe à laquelle on sait mener des tangentes par le procédé du n° 495.

716. Si cette surface avait pour directrices une ligne et deux surfaces, ou deux surfaces et une ligne, les opérations que nous venons d'indiquer pour construire les élémens deviendraient beaucoup plus simples. On en va voir tout à l'heure un exemple.

717. Comme chaque élément d'une surface gauche engendrée par le mouvement d'une droite qui s'appuie constamment sur trois surfaces, touche chacune de ces surfaces en un point, la suite des points de contact des différens élémens forme sur ces surfaces trois courbes, suivant lesquelles elles sont touchées par la surface engendrée. Il serait facile de déterminer ces courbes, et l'on pourrait ensuite les prendre pour directrices de la surface gauche: mais ce serait sans avantage bien sensible; parce qu'on n'a pas de méthode simple pour leur mener des tangentes (499).

Sachant représenter les surfaces dont nous nous occupons, la question importante à résoudre est celle du plan tangent. Nous allons indiquer un moyen très commode de le construire.

718. PROBLÈME 1er. *Étant donnée une surface gauche du genre de celles qui ont pour directrices trois surfaces, avec un de ses élémens et un point de cet élément, on demande le plan tangent à la surface en ce point.*

L'élément sur lequel est le point de contact touchera les surfaces directrices en trois points; par ces points on menera des plans respectivement tangens à ces surfaces, et ces plans toucheront aussi la surface gauche. Or, si l'on mène dans ces trois plans, et par leurs trois points de contact, trois droites quelconques; il est clair que l'hyperboloïde à une nappe dont elles seront les directrices aura trois plans tangens communs avec la surface gauche; que les trois points de contact de ces plans seront sur l'élément donné, et que, par conséquent, l'hyperboloïde touchera la surface donnée tout le long de cet élément (696). En menant donc par le point donné un plan tangent à l'hyperboloïde auxiliaire, on aura le plan tangent à la surface gauche.

Si une ou plusieurs des surfaces directrices se trouvent remplacées par des lignes données, auxquelles on sache mener directement des tangentes, la construction du plan tangent deviendra encore plus simple; parce que l'hyperboloïde aura pour directrices les droites tangentes à ces lignes menées par les points où elles seront rencontrées par l'élément sur lequel est le point de contact.

L'application qui suit va achever d'éclaircir cette solution.

719. PROBLÈME 2. *On demande, 1°. de représenter la surface gauche produite par le mouvement d'une droite assujettie à toucher constamment une surface cylindrique donnée et deux courbes données; 2°. de mener un plan tangent à cette surface gauche par un point donné sur un de ses élémens.*

Choisissons pour plan horizontal un plan perpendiculaire à la surface cylindrique directrice de la surface donnée, et soient (AB, A'B'), (CD, C'D'), les deux directrices linéaires de cette surface, et EFG la trace horizontale du cylindre vertical qui lui sert de troisième directrice. Nous commencerons par représenter la surface donnée; et pour cela, nous menerons une suite de plans verticaux AC, HI, LM, etc., tangens à la surface cylindrique directrice: chacun d'eux coupera les directrices linéaires en deux points (A, A') et (C, C'), (H, H') et (I, I'), (L, L') et (M, M'), etc.; et les droites indéfinies (AC, A'C'), Pl. 57.

Pl. 57. (HI, H'I'), (LM, L'M'), etc., qui joindront les points correspondans, seront évidemment des élémens de la surface donnée, puisqu'elles toucheront à la fois les trois directrices.

Si l'on construit ainsi un nombre suffisant d'élémens (AC', A'C'), (HI, H'I'), (LM, L'M'), etc., on aura la représentation de la surface donnée, et il est clair que le cercle EFG, que touchent les droites AC, HI, LM, etc., sera le contour de la projection horizontale.

En projection verticale, les élémens A'C', H'I', L'M', etc., détermineront par leurs intersections successives une courbe *pqris*, qui sera le contour de la projection verticale de la surface gauche. Dans l'exemple particulier que nous avons choisi, ce contour offre un point *r* de rebroussement.

720. Passons à la construction du plan tangent. Soit P la projection horizontale de son point de contact: ce point sera sur un élément projeté horizontalement en JK, et verticalement en J'K'; donc la projection verticale de ce point sera le point P', situé sur la verticale (P, PP').

L'élément (JK, J'K'), qui contient le point de contact, touchera les directrices linéaires suivant les points (J, J') et (K, K'), et la directrice cylindrique suivant le point (a, a'). Par les deux premiers nous menerons les droites (JQ, J'Q'), (KR, K'R'), respectivement tangentes aux courbes (AB, A'B'), (CD, C'D'), et elles seront, comme on l'a vu précédemment (718), deux des trois directrices de l'hyperboloïde auxiliaire. Pour avoir la troisième, nous menerons par le point (a, a') une droite quelconque $(aS, a'S')$, qui soit dans le plan vertical aJ. Et comme ce plan est tangent en (a, a') à la surface directrice, il s'ensuit que l'hyperboloïde à une nappe dont (JQ, J'Q'), $(aS, a'S')$, (KR, K'R'), sont les trois directrices, est tangent à la surface donnée suivant les trois points (J, J'), (a, a'), (K, K'), du même élément (JK, J'K'); et que, par conséquent, le plan cherché, tangent en (P, P') à cette surface, sera le plan tangent au même point de l'hyperboloïde. D'après cela, et d'après ce qu'on a vu n° 326, il sera facile de construire ce plan.

721. *Exécution de l'épure.* Nous n'avons représenté que la portion de surface limitée aux directrices linéaires et aux élémens (AC, A'C'), (BD, B'D').

La surface directrice étant une des données de l'épure, on a indiqué sa trace horizontale EFG par une ligne pleine, et les contours *tu*, *vx*, de sa projection verticale, aussi par des lignes pleines, si ce n'est dans les parties où ils se trouvent cachés par la surface gauche.

Pour déterminer les parties vues et cachées des élémens, examinons celui dont les projections sont NO, N'O'. Il est clair que la partie N*b* de sa projection horizontale ne peut être cachée par rien; ainsi elle doit être pleine. La partie *b*F doit être pleine aussi; car les points de l'élément (NO, N'O'), projetés en *b*, *c*, *d*, etc., sont au-dessus des points des élémens (AC, A'C'), (HI, H'I'), (JK, J'K'), etc., projetés aux mêmes points, *b*, *c*, *d*, etc. Par des considérations semblables, on verra que les points de l'élément (NO, N'O'), projetés entre F et *h*, sont au-dessous des élémens (BD, B'D'), (TU, T'U'), etc., et l'on en conclura que la partie F*h* de NO doit être ponctuée. Quant à la partie *h*O, il est évident qu'elle est vue.

La projection verticale N'O' ne présentera pas plus de difficulté. On reconnaîtra d'abord que les parties N'*i*, *m*O', sont vues. Des constructions fort aisées feront voir ensuite que la

partie de (NO, N'O'), projetée en *iq*, passe en arrière des élémens A'C', H'I', J'K', L'M', Pl. 57.
et qu'elle est par conséquent cachée. Enfin on reconnaîtra que la partie projetée en *qm*, étant en avant des élémens B'D', T'U', etc., est nécessairement vue.

Il faudra encore faire attention, pour la projection verticale, qu'il pourra y avoir des élémens cachés en partie par le cylindre EFG.

Quant à la courbe *pqris*, elle sera vue lorsqu'elle touchera des projections d'élémens, vues d'un côté du point de contact, et elle sera cachée lorsque ces projections ne seront vues ni d'un côté de leur point de contact, ni de l'autre côté.

722. DES SURFACES GAUCHES *qui forment les filets des vis.* Les surfaces qui forment les filets des vis appartiennent tout-à-la-fois à deux genres de surfaces gauches.

Dans l'un, le mouvement de la droite génératrice est déterminé par la condition que cette droite s'appuie constamment sur une directrice linéaire, et qu'elle la rencontre toujours sous le même angle, sans cesser d'ailleurs de toucher une deuxième directrice quelconque.

Dans l'autre, la génératrice a deux directrices quelconques, et son mouvement est déterminé par la condition que la partie de cette génératrice, comprise entre les deux directrices, soit d'une longueur constante.

723. L'examen de ces deux genres de surfaces nous conduirait trop loin, et serait dénué d'intérêt : nous nous bornerons à considérer l'espèce qui leur est commune, et qu'on emploie dans la construction des vis.

Ce qui caractérise cette espèce, c'est que les directrices sont toujours une hélice et son axe, et que la génératrice rencontre l'axe de l'hélice sous un angle constant, ou, ce qui revient au même, comme on va le voir (726), que la partie de cette génératrice, comprise entre les directrices, est d'une longueur constante. Nous donnerons aux surfaces de cette espèce, le nom d'*héliçoïdes gauches.* On démontrera plus loin, n° 725, que ces surfaces appartiennent à la famille des surfaces gauches, et au n° 729, qu'elles sont coupées, ainsi que les héliçoïdes développables, par des cylindres concentriques à celui qui contient l'hélice directrice, suivant des hélices de même pas. Les problèmes qui suivent vont faire connaître les propriétés des héliçoïdes gauches.

724. *PROBLÈME 1er. Étant données une hélice et une droite qui s'appuie sur cette hélice et sur son axe, représenter l'héliçoïde gauche dont cette droite, mobile sans que la partie comprise entre l'axe et l'hélice varie de longueur, est la génératrice.*

Soit IK l'axe vertical de l'hélice donnée; ABCD la projection de cette hélice sur un plan Pl. 58.
parallèle à son axe; A, B, C, D, etc., les projections des points suivant lesquels elle est coupée par un plan mené par IK, parallèlement au plan vertical de projection; *a*A, BC, D*z*, etc., les parties antérieures de cette hélice, et AB, CD, etc., ses parties postérieures.

Enfin, soit *a*LM une droite menée par le point *a* de l'hélice *a*ABC, et par le point L de l'axe IK, de manière que la distance comprise entre ces points soit la longueur constante donnée.

725. Il est bien clair qui si la droite *a*LM se meut sur l'hélice *a*ABC, et sur l'axe IK, de manière que la longueur projetée en *a*L soit constante, deux positions consécutives de

Pl. 58. cette droite ne seront pas dans le même plan, ainsi la surface donnée sera bien une surface gauche.

726. Il est clair aussi que les points a, b, A, c, etc., de l'hélice, étant également distans de l'axe IK, et la longueur projetée en aL étant constante, comme on l'a supposé, l'angle projeté en aLK sera aussi constant, et réciproquement.

727. De ce que l'angle aLK sera constant, il s'ensuit que lorsque la génératrice s'élevera, le long de l'axe IK, d'une certaine hauteur, le point suivant lequel elle s'appuyera sur l'hélice, et tous ses autres points, s'éleveront à la même hauteur.

D'après cela, il est évident que si l'on prend sur l'hélice aABC, une série de points b, A, c, d, e, f, etc., élevés au-dessus du point a des hauteurs verticales π, 2π, 3π, 4π, 5π, etc.; sur l'axe IK une autre série de points m, n, o, p, q, r, etc., élevés respectivement au-dessus du point L des mêmes hauteurs π, 2π, 3π, etc., et qu'on mène les droites bm, cn, do, ep, fq, gr, etc., par les points de l'hélice et de son axe également élevés au-dessus des points respectifs a et L, ces droites seront des élémens de l'héliçoïde.

728. Les projections cn, do, ep, fq, gr, hs, de ceux de ces élémens qui passent par les points c, d, e, f, g, h, détermineront une courbe hqO, qui touche et laisse d'un même côté les projections de tous les élémens qui passent par l'arc AB. Cette courbe est conséquemment un des contours de la projection de la surface. Il est facile de voir que ses parties qh et qO s'étendront à l'infini, et qu'elles auront pour asymptotes les projections des élémens qui passent par les points A et B.

De même, les projections iU, jV, kX, lY, m'Z, n'W, des élémens qui s'appuient sur l'arc BC, détermineront une courbe $n'x$U, égale à hqO, mais située en sens contraire, et telle que les branches infinies qh et xd'U auront une asymptote commune. D'où l'on peut conclure que le contour de la projection verticale de l'héliçoïde est composé d'une infinité de branches infinies hqO, Uxn', $o'p'g''$, $r's'$, etc., égales entre elles, disposées régulièrement à droite et à gauche de l'axe IK, et dont chacune est conjugée avec ses voisines au moyen de deux asymptotes.

729. L'angle aLK de la génératrice aLM et de l'axe IK étant toujours constant (726), on voit clairement que tous les points de cette génératrice engendreront des hélices; que ces hélices auront toutes le même pas, et que les rayons de leurs bases seront égaux aux distances respectives de l'axe IK aux points générateurs. C'est-à-dire qu'elles seront les sections de l'héliçoïde et des cylindres à bases circulaires qui ont IK pour axe.

730. Il résulte de là un moyen fort simple de mener par un point quelconque S, d'un élément gS de la surface gauche, un plan tangent à cette surface. En effet, la distance du point S à l'axe IK sera connue, et cette distance sera le rayon d'une hélice située sur cette surface, et ayant le même pas que l'hélice aABC: cette hélice, correspondante au point S, sera par conséquent déterminée, et l'on pourra mener sa tangente en S; or, le plan qui passera par cette tangente, et par l'élément gS, sera le plan tangent cherché.

731. Lorsque le point a, de la génératrice aLM, aura parcouru unè demi-révolution de l'hélice directrice aABC, cette génératrice passera par un point g, qui sera dans le plan du point a et de l'axe IK, et il est clair que les deux positions grS, aLM, seront dans ce même plan : d'où il suit qu'elles se rencontreront en un certain point a'. Prenons La'' égal à La'; il est évident que le point a'' sera celui qui, après une demi-révolution de aLM, se

trouvera en a' sur grS. Imaginons maintenant que la génératrice aLM, lorsqu'elle sera parvenue en grS, continue son mouvement, il est évident que le point a'', arrivé en a', décrira l'hélice $a'b'c'd'e'f'g'$, déjà décrite par le point d'; donc les portions de surfaces respectivement engendrées par les parties LM, La, de la génératrice, se coupent suivant la courbe singulière $a'b'c'd'e'f'g'$... Pl. 58.

On peut remarquer de même que les deux points k' et a étant distans, sur l'hélice directrice, d'une révolution et demie, les élémens $k'l''S'$, aLM, qui leur correspondent, prolongés suffisamment, se rencontreraient en un point; qu'il en serait ainsi, si les deux points k' et a étaient distans de deux révolutions et demie, de trois révolutions et demie, etc., et que, par conséquent, les mêmes portions de surfaces, dont LM et La prolongées indéfiniment sont les génératrices, se coupent suivant une infinité d'hélices, qui ont pour rayons la distance du point a' à l'axe IK, le double de cette distance, son triple, son quadruple, etc.

732. Si l'on demande l'hélice qu'engendre le point a', laquelle est l'une de ces intersections, il ne s'agira pour la construire que de prendre sur l'hélice directrice une suite de points a et g, b et h, c et i, etc., situés deux à deux dans un plan passant par l'axe IK, et de mener par ces points les élémens aL et gS, bm et hT, cn et itU, etc.; ces élémens se couperont suivant les points de la courbe $a'b'c'd'e'f'g'h'$, qui sera la projection verticale de l'hélice demandée.

Cette hélice $a'b'c'd'e'f'g'$, ainsi que toutes celles qu'on peut tracer sur l'héliçoïde, a sa projection tangente en deux points à chacun des contours Uxn', Oqh, $o'p'g''$, etc., et ces points sont ceux suivant lesquels l'hélice passe de la partie antérieure de la surface à sa partie postérieure.

733. *Exécution de l'épure.* Nous n'avons employé qu'une seule projection pour représenter l'héliçoïde gauche donné, parce que les constructions à indiquer étaient extrêmement simples, et parce qu'ayant des lignes bien connues, l'axe IK et l'hélice aABC, pour fixer nos idées, il était facile de suppléer par la pensée à tout ce que devait montrer la projection horizontale.

Cependant pour rappeler cette projection, nous avons décrit sur l'épure le cercle $\alpha\beta$... $\gamma\delta\iota\zeta\alpha$, qui nous a servi pour construire l'hélice aABC.

Les arcs $\gamma\delta$, $\delta\iota$, $\iota\zeta$, etc., sont égaux entre eux, et au douzième de la circonférence $\alpha\beta$... $\gamma\delta\iota\zeta\alpha$. On en déduit aisément les points (α, a), (β, b), etc., de l'hélice directrice, et les élémens aLM, bmN etc., s'ensuivent (727).

L'hélice MNOPQ..., ayant même pas que l'hélice $abcd$..., les différences de hauteurs des points M, N, O, P, etc., sont les mêmes que pour les points a, b, c, d, etc., ce qui sert à déterminer les points N, O, P, etc., sur les élémens bmN, cnO, doP, etc., dès que le point M est donné.

Afin que les lignes de l'épure ne présentassent pas trop de confusion, nous nous sommes bornés à représenter la portion de surface décrite par la partie de la génératrice comprise entre a et M.

734. Il est évident que les arcs antérieurs abA, B$ijklm'n'$C, Dz, de l'hélice directrice sont vus, ainsi que les parties Acdi', Ck'', des arcs postérieurs A$cdefgh$B, C$k''k'g''$D. Quant aux parties $i'efgh$, $k''k'g''$, des mêmes arcs postérieurs, elles sont derrière la surface engendrée; ainsi elles sont cachées.

Pl. 58. Les arcs OPQRST et *cdefgh*, des hélices MNOPQ .., *abAcdef*..., sont sur des parties opposées de la surface gauche; d'où il faut conclure que l'arc *cdefgh* étant en arrière du plan vertical IKD, l'arc OPQRST est en avant de ce même plan. On verra de même que les arcs UVXYZW, $r'a''$, sont sur des parties postérieures de l'héliçoïde, et qu'en conséquence les lignes UVXl', $r'a''$, sont cachées.

Nous ne nous arrêterons pas davantage sur la distinction des lignes vues et cachées de l'épure; ce qui précède suffit pour que cette distinction se fasse aisément.

735. *Problème 2. Représenter la surface d'une vis à filet triangulaire.*

Concevons dans l'espace un cylindre droit, et imaginons qu'un triangle isoscèle soit construit au dehors de ce cylindre, dans un de ses plans méridiens, et de manière que la base du triangle coïncide avec un élément du cylindre. Cela posé, figurons-nous que le plan méridien prenne un mouvement uniforme de rotation autour de l'axe du cylindre, et que, pendant une révolution de ce mouvement, le triangle, par un mouvement uniforme de translation, avance dans le sens de l'axe de rotation d'une longueur égale à la base; on sait que les côtés égaux de ce triangle décriront, par la combinaison de ces deux mouvemens, la surface d'une vis à filet triangulaire.

Mais il est clair que le sommet de ce même triangle engendrera une hélice, et que les côtés générateurs s'appuyeront sur cette hélice et sur son axe, en faisant toujours le même angle avec cet axe; donc la surface d'une vis à filet triangulaire est de l'espèce des héliçoïdes gauches.

Pl. 59. Fig. 1. 736. Soit donc ABCDEF la projection verticale d'une hélice à base circulaire dont *ry* soit l'axe, et soit *ar* et *ad* les directions des deux côtés égaux du triangle générateur d'une vis: les droites *ab*, *ad*, rencontreront, sous des angles égaux, l'axe *ry* de l'hélice ABCDEF.

Or, pour pouvoir représenter la surface engendrée par les lignes *ar* et *ad*, il faudra d'abord savoir construire leurs positions diverses. Prenons sur l'hélice donnée un point quelconque *q*, et cherchons les positions des génératrices qui correspondent à ce point. Pour cela, nous remarquerons que le point *q* est au-dessous du point *a*, dans le sens de l'axe *ry*, d'une certaine hauteur; nous porterons cette hauteur de *r* en *s* sur l'axe *ry*; nous menerons la droite *qs*, et cette droite sera la position prise par la génératrice *ar*, lorsque le point *a* sera venu en *q*; car on sait (727) que tous les points de cette génératrice s'élèvent, d'une même hauteur, d'une de ses positions à une autre.

Quant à la position *qp*, correspondante au point *q*, que prendra la génératrice *ad*, on pourra la déterminer par la condition que l'angle de *qp* avec *ry*, égale celui de la même ligne *ry* avec *qs*.

737. En construisant de même plusieurs élémens *ar*, *vx*, *mo*, *qs*, *tu*, de la surface de la vis, on en déduira le contour *zco*, correspondant à la portion de surface à laquelle appartiendront ces élémens. Ce contour sera tangent à l'arc B*ztq* de l'hélice donnée, et à l'axe *ry* de cette hélice.

Le contour *jn* sera déterminé, de la même manière, par un nombre suffisant de positions de *ad*.

738. Lorsque le point *a* aura parcouru une révolution entière de l'hélice donnée, il sera en a' dans le plan méridien *ary* : les droites génératrices *ab*, *ad*, seront en $a'd$ et $a'w$,

dans le même plan que ab et ad; par conséquent ad et $a'd$, se couperont en un point d, de l'arête rentrante de la vis. Pl. 59. Fig. 1.

Si l'on mène par le point q une parallèle à ry, elle coupera l'arc CD de l'hélice donnée en un point q', tel qu'en menant les droites $q'p$, $q'p'$, respectivement parallèles à qs et qp, on aura de nouveaux élémens $q'p$, $q'p'$, de la surface de la vis, dont le premier $q'p$ rencontrera qp en un point p, de l'arête rentrante dont il s'agit. On pourra, en construisant ainsi de nouveaux points de cette arête, la décrire entièrement; mais comme c'est une hélice de même pas que l'hélice donnée, on pourra aussi la construire directement dès qu'on connaîtra un de ses points d.

739. Quoique les vis offrent d'ordinaire une arête rentrante $bcdefghi$, il serait possible d'en construire qui n'en offrissent pas, et celle dont nous nous occupons serait justement dans ce cas, si la base bd, du triangle générateur abd, coïncidait avec l'axe ry de l'hélice donnée : c'est-à-dire si le rayon du cylindre donné se trouvait nul. Fig. 2.

Pour le prouver, soit (BEF, $abcdefghi$), une hélice à base circulaire dont la droite verticale (A, rs) soit l'axe, et menons par cet axe un plan quelconque $m'f'$: ce plan coupera une même révolution de l'hélice donnée en deux points (m', m), (f', f). Cela posé, imaginons que le plan $m'f'$ prenne un mouvement de rotation autour de l'axe (A, rs), et qu'il emporte avec lui la droite ($m'f'$, mf), continuellement assujettie à toucher l'hélice (BEF, $abcd$...) suivant deux points opposés de la même révolution : je dis que cette droite engendrera une vis sans arête rentrante.

Nous savons d'abord que la surface produite sera de l'espèce de celle des vis; car la droite génératrice touchera constamment une hélice et son axe, en faisant toujours le même angle avec cet axe (723). De plus, on peut remarquer qu'en supposant que la droite génératrice se meuve en descendant, le point (m, m') se trouvera en (f, f'), au bout d'une demi-révolution du plan méridien, en sorte que la génératrice se trouvera en af : mais si l'on considère à la fois les droites mf et af comme génératrices, on verra clairement que la partie mu de mf, et la partie tf de af, décrivent la même portion de surface; donc la surface qui nous occupe est la même que si l'on faisait mouvoir le triangle tfu le long de l'axe (A, rs) et de l'hélice (BEF, $abcd$...).

Ainsi, la droite fm engendre bien la surface entière d'une vis (735); et comme le contour vxy, d'une portion quelconque de cette surface, ne présente pas d'angle rentrant, il est clair que cette vis n'aura pas d'arête rentrante.

740. Pour bien donner l'idée du solide qui la forme, coupons-la par le plan horizontal A'B'; on aura pour section la courbe (BCAD, A'B'), qui ne sera autre chose qu'un arc d'une sorte de spirale (*) soumise à la loi de continuité : et si l'on imagine que le point (B, B') de cette section se meuve sur l'hélice (BEF, $abcd$...), en emportant avec lui la section horizontale (BCADB, A'B'), dont le point (A, A') soit toujours sur (A, rs), cette section engendrera le solide de la vis.

741. Nous ferons encore observer que si l'on supprimait celles des parties de l'héliçoïde

(*) Cette spirale est caractérisée par la propriété que, pour chacun de ses points, le rayon vecteur AM est proportionnel à l'angle PAM de ce rayon et de la ligne fixe PAx. On la connaît sous le nom de *spirale d'Archimède*.

Pl. 58. représenté pl. 58, qui sont extérieures au cylindre dans lequel est l'hélice *a'b'c'd'e'f'*..., la surface obtenue formerait une vis sans arête rentrante.

Si l'on prolongeait convenablement la droite génératrice *a*LM, les portions de surface qui se terminent aux arcs d'hélice W*o'f'S'r'*, *ab*A*c*, viendraient se rencontrer suivant une nouvelle hélice, qui serait l'arête saillante d'une vis dont l'hélice *a'b'c'd'*... serait l'arête rentrante : dans ce cas, le dessus et le dessous du filet triangulaire appartiendraient au même héliçoïde. En général, ce dessus et ce dessous appartiennent à des héliçoïdes différens.

Pl. 59. Fig. 1. 742. *Exécution de la figure* 1, pl. 59. Nous n'avons représenté que les parties vues des arêtes saillante et rentrante de la vis. Ces parties A*avmqtz*B*j*, C*a'l*D, EF, pour l'arête saillante; *kc*, *de*, *fg*, *hi*, pour l'arête rentrante, se terminent aux points où elles touchent les contours F*g*, D*ln*, *zc*, *h*E, *f*C, *d*A, des projections de la surface.

Nous avons supposé que le filet de la vis ne se prolongeait pas au-delà des arcs *bc* et *hi* de l'arête rentrante, en sorte qu'au-dessus du premier, et au-dessous du second, on voit le cylindre que revêt ce filet.

Fig. 2. 743. *Exécution de la figure* 2, pl. 59. Les arcs *abcde*B', *mn*, *op*, de l'hélice donnée, sont supposés sur la partie antérieure du cylindre BEF, et il s'ensuit que ces arcs sont vus jusqu'aux points où ils touchent les contours de la surface, lesquels sont vus aussi (159). Toutes les projections des élémens qui aboutissent sur les arcs d'hélice vus se trouvent nécessairement vues, et celles qui aboutissent sur des arcs d'hélice cachés se trouvent nécessairement cachées. Les points de séparation des parties vues et cachées se trouvent d'ailleurs sur les contours. Quant à l'axe (A, *rs*), il se trouve évidemment composé de parties égales alternativement vues et cachées.

744. PROBLÈME 3. *Représenter une vis à filet carré.*

Fig. 3. Soit *abcd* un rectangle dont le côté *ad* soit sur la surface d'un cylindre, et dont le plan *abcd* passe par l'axe du même cylindre. Cela posé, imaginons que ce rectangle se meuve de manière à conserver toujours, par rapport à l'axe AB, la position qui vient d'être définie, et de manière encore que l'un de ses points *a* décrive une hélice sur le cylindre donné : ce cylindre, et le solide engendré par le rectangle, composeront ce qu'on appelle une vis à filet carré.

Tous les points du rectangle *abcd* décriront des hélices de même pas; les droites *ab*, *dc*, seront toujours perpendiculaires à l'axe du cylindre, et le rencontreront constamment; ainsi ces droites se mouvront sur une hélice et sur son axe, en faisant sans cesse un angle droit avec cet axe : donc elles engendreront des héliçoïdes gauches.

Pour représenter la surface de la vis, on décrira les parties vues des hélices produites par les points *a*, *b*, *c*, *d*; on indiquera les contours du cylindre que renferme le filet produit par le rectangle *abcd*, et l'on construira, si l'on veut avoir une représentation bien complète, les projections *fe*, *hg*, *ki*, etc., de plusieurs élémens des surfaces gauches du filet.

745. Nous ferons remarquer en passant, que la génératrice de ces surfaces étant toujours perpendiculaire à l'axe directeur AB, elle est toujours parallèle au plan horizontal : il suit de là que les héliçoïdes gauches, qui servent à former les vis à filet carré, appartiennent à l'espèce de surfaces gauches que nous avons nommées conoïdes (220).

CHAPITRE II.

Des enveloppes et de leurs arêtes de rebroussement.

746. Nous avons vu, liv. II, chap. IV, que lorsqu'une surface, constante ou variable de forme, se meut en restant assujettie à une loi donnée, deux positions consécutives de cette surface se coupent suivant une courbe appelée *caractéristique ;* que l'ensemble des caractéristiques forme une surface particulière qui touche les positions de la surface mobile, chacune, suivant une caractéristique, et qu'on donne le nom d'*enveloppées* aux positions de la surface génératrice, et celui d'*enveloppe* à la surface engendrée.

Nous avons vu aussi que deux caractéristiques consécutives se touchent ou se coupent en un point, et que la suite des points de contact ou d'intersection, des positions successives de la caractéristique, forme sur l'enveloppe une courbe remarquable, appelée *arête de rebroussement*, qui touche ces positions, et qui se trouve formée par leurs contacts successifs, comme l'enveloppe résulte des contacts successifs des positions de l'enveloppée. Enfin, nous avons vu que cette arête divise la surface enveloppe en deux nappes, et nous avons reconnu que ces deux nappes présentaient réellement, sur les hélicoïdes développables (264), un véritable rebroussement, suivant l'arête par laquelle elles se joignent.

747. Il s'agit actuellement de prouver que la dénomination d'*arête de rebroussement* est juste, c'est-à-dire qu'une telle arête réunit toujours deux nappes par un vrai rebroussement.

Concevons d'abord qu'il s'agisse d'une surface développable, et considérons un arc A de l'arête qui réunit les deux nappes de cette surface. Certaines positions E, E′, E″, E‴..., de la caractéristique se rencontreront deux à deux suivant les points de l'arc A : nommons ces points k, k', k'', k''',..., et supposons que le premier soit l'intersection de E avec E′, le second celle de E′ et E″, et ainsi de suite. Cela posé, imaginons par le point k, une droite p perpendiculaire au plan des élémens E et E′, par le point k' une droite p', perpendiculaire au plan des élémens E′ et E″, et ainsi de suite. Toutes les droites p, p', p'', etc., formeront une

surface, normale à la surface donnée suivant l'arc A; or, les droites E, E', E"..., tangentes à l'arc A, seront en général tout entières d'un même côté de cet arc : donc la surface développable n'entrera pas dans la surface normale; donc les deux nappes qui la forment présenteront, suivant l'arc A, un véritable rebroussement.

748. Concevons maintenant qu'il s'agisse d'une enveloppe quelconque, et menons par les points de l'arête suivant laquelle se réunissent les deux nappes des tangentes aux caractéristiques : ces tangentes toucheront aussi cette arête; donc elles formeront une surface développable (260). Donc, d'après ce qui vient d'être démontré, l'arête suivant laquelle se réuniront les deux nappes de l'enveloppe donnée sera une véritable arête de rebroussement de la surface développable. Mais chaque nappe de cette surface sera tangente à une nappe de la surface enveloppe; donc puisque les nappes de la surface développable offrent un rebroussement, celles de l'enveloppe donnée en présenteront pareillement un. Donc enfin, la dénomination d'arête de rebroussement est tout-à-fait exacte.

749. Quoique les démonstrations précédentes aient toute la rigueur possible, le rebroussement produit par la génération d'une surface enveloppe, que l'on peut imaginer décrite par le mouvement de sa caractéristique, est toujours une espèce de phénomène géométrique dont on se rend difficilement compte. D'après cela, il ne sera pas inutile de faire connaître quelques surfaces qui présentent des arêtes de rebroussement.

Nous choisirons nos exemples parmi les surfaces engendrées par le mouvement d'une sphère constante de rayon, dont le centre suit une courbe plane et horizontale. Ces surfaces sont du nombre de celles qu'on appelle *surfaces des canaux*.

Pl. 60. Fig. 1. 750. Soit ABC une courbe horizontale située dans le plan de la figure. Prenons cette courbe pour directrice du centre d'une sphère dont le rayon soit DE. Il est évident que deux positions consécutives de la sphère mobile se couperont suivant un de ses grands cercles, et que le plan de ce cercle sera vertical et aura pour projection une droite normale à la courbe ABC.

D'après cela, si nous menons à cette courbe une suite de normales telles que DQ, et que nous prenions, de part et d'autre de ABC, les longueurs DE, DP, égales au rayon de la sphère mobile, la partie PE, de chacune de ces normales, sera la projection d'une caractéristique. Si donc on construit de la même manière d'autres projections SM, TI, ZW, *pq*, *ca*, XN, KY, etc., des caractéristiques, et qu'on mène les lignes KUE, LMNO, ces lignes seront les contours de la projection de l'enveloppe.

751. Soit QFGH la développée de ABC, et concevons par cette développée un cylindre vertical. Chaque plan IT, d'une caractéristique, touchera le cylindre QFGH suivant un élément vertical *m* de ce cylindre, et en général le plan de la caractéristique IT, et celui de la caractéristique consécutive, se croiseront suivant l'élément *m*. Mais ces caractéristiques, situées sur une même enveloppée sphérique, se couperont ou se toucheront en deux points

de l'arête de rebroussement, lesquels points seront nécessairement sur le même élément *m*, et se projeteront par conséquent en *m*. Nous poserons donc en principe que les points de l'arête de rebroussement ne seront autre chose que ceux suivant lesquels les caractéristiques SM, TI, ZW, etc., touchent le cylindre QFGH. Pl. 60. Fig. 1.

752. Et comme il y a des caractéristiques, telles que PE, qui ne s'étendent pas jusqu'à ce cylindre, c'est-à-dire jusqu'à l'élément de contact Q, ces caractéristiques ne présenteront pas de points de l'arête de rebroussement. Il est visible en effet que chacune d'elles ne coupe ni celle qui la précède, ni celle qui la suit.

753. Pour bien concevoir la forme de cette arête, imaginons que l'enveloppe soit produite par sa caractéristique; c'est-à-dire par le mouvement d'un cercle dont le centre suive la courbe ABC, dont le plan soit toujours normal à cette courbe, et dont le rayon soit égal à DE. Supposons que ce cercle marche dans le sens ABC; il est clair que parmi les positions de la caractéristique mobile, la première qui donnera quelque point de l'arête de rebroussement sera celle dont la projection SM touche la développée QFGH en un point M, tel que VM égale le rayon donné DE. Il est clair également que cette position ne donnera qu'un point de cette arête, que les positions suivantes en donneront deux, jusqu'à la position XN qui n'en donnera qu'un, et qu'enfin, toutes les autres positions n'en donneront plus.

Nous conclurons de là que l'arête de rebroussement formée par les contacts successifs de la caractéristique, et du cylindre QFGH, se compose de deux branches, qui ont pour projection commune une ligne M*m*G*n*N.

754. Chacune des caractéristiques comprises entre SM et XN est divisée par l'arête de rebroussement en deux parties, l'une T*m* qui appartient à l'une des nappes de la surface; l'autre *m*I qui appartient à l'autre nappe. D'où l'on voit que l'une de ces nappes a pour contour de sa projection les lignes KUE, LM, NO, et la projection M*m*G*n*N de l'arête de rebroussement; et l'autre nappe, cette même projection M*m*G*n*N, et la partie N*q*WM du contour LMNO.

755. Au lieu d'assujettir la génératrice PDE à suivre la courbe ABC, on peut encore imaginer que le plan QDE, qui la contient, soit seulement assujetti à rouler, sans glisser, sur le cylindre QFGH; car la génératrice prendra, dans les deux cas, absolument le même mouvement.

Concevons que toutes les verticales qui composent le plan QDE soient autant de charnières, et imaginons, 1°. qu'il s'enroule sur le cylindre QFG, en se pliant successivement autour des charnières verticales, jusqu'à ce que le cercle générateur ait pris la position M*m*GU; 2°. que la partie enroulée M*m*G de ce cercle se déroule, à partir du point M, pour occuper successivement les positions G*m*I, G*i*W, G*rq*, G*na*, G*n*N; 3°. enfin, que le plan mobile, ainsi plié sur UG*n*N, reprenne son mouvement, en continuant de s'enrouler sur QFGH, c'est-à-dire en se déroulant d'autour de GNH. Dans ces mouvemens, la partie mobile du cercle PE décrira la même surface que si le plan PQE était rigide; car la partie enroulée ne pourra changer en rien le mouvement de la partie non enroulée : donc le cercle PE engendrera l'enveloppe.

756. Mais il est clair que la partie PR, du cercle PE, s'appliquera sur le cylindre QFGH suivant tous les points où les caractéristiques le touchent, ou, ce qui revient au même,

Pl. 60. Fig. 1. suivant les points de l'arête de rebroussement : donc cette arête n'est autre chose que la partie PR du cercle PE, enroulée d'abord en M*m*H, et ensuite en G*n*N, sur le cylindre FGH. D'après cela, on doit concevoir parfaitement la forme de l'arête de rebroussement, et l'on remarquera qu'elle a elle-même deux points de rebroussement projetés en G.

757. Il est bien facile d'ailleurs de prouver, pour cet exemple particulier, que l'arête projetée en M*m*G*n*N est une véritable arête de rebroussement. En effet, chaque point de la partie PR de la caractéristique décrit évidemment une développante *lmno* de QFGH, laquelle développante présente deux points *m* et *n* de rebroussement ; or, les branches *lm*, *no*, appartiennent à la grande nappe de l'enveloppe, et la branche *mn* à la petite : d'où l'on voit que ces deux nappes sont normales suivant l'arête de rebroussement à la surface cylindrique QFGH.

758. Nous ferons observer en passant que l'enveloppe dont nous venons de nous occuper présente une ligne singulière, projetée en G*x*, suivant laquelle se coupent deux parties de sa nappe principale.

759. Examinons un autre exemple, pris encore dans le genre de surfaces qu'on appelle

Fig. 2. *surfaces des canaux*. Soit ABC la spirale développante d'un cercle DBE, et concevons qu'une sphère, dont le rayon soit FG, se meuve de manière que son centre suive toujours la spirale ABC. Il est clair que deux positions consécutives de cette surface se couperont suivant un cercle GH, dont le centre F sera sur ABC, et dont le plan, normal à cette directrice, sera vertical, et tangent au cylindre qui aurait pour base DBE et pour élémens des verticales.

760. Il suit de là que si l'on fait mouvoir le cercle GH, de manière qu'il satisfasse constamment à la condition d'avoir son centre sur ABC, et son plan normal à cette courbe, il engendrera l'enveloppe dont nous nous occupons : or, deux positions consécutives du plan GH de la caractéristique se couperont suivant un élément D du cylindre DBE ; d'où l'on voit que l'arête de rebroussement de l'enveloppe sera nécessairement sur ce cylindre. Et si l'on conçoit que les verticales qui composent le plan DG soient autant de charnières, et qu'on enroule ce plan sur le cylindre DBE, il est évident que dans le mouvement qu'éprouvera la caractéristique GH, elle ne quittera pas la surface de l'enveloppe, et qu'elle viendra s'appliquer sur le cylindre DBE suivant une courbe, projetée horizontalement en IBL, qui sera l'arête de rebroussement.

761. Mais chaque point de la caractéristique engendre une spirale horizontale GKLM, qui vient rencontrer en un point L le cylindre DBE, et dont les deux branches GKL, LM, sont normales à ce cylindre en ce point. D'après cela, il est évident que l'enveloppe a deux nappes, l'une composée des branches GQL, RS, AFB, OV, NHI, etc., des spirales horizontales de la surface, et l'autre, des branches LM, ST, BC, VX, IQO', etc., des mêmes spirales ; que ces deux nappes viennent se toucher suivant l'arête de rebroussement IBL, et qu'elles sont l'une et l'autre normales au cylindre DBL suivant les points de cette arête.

762. Il semble que nous aurions pu choisir, pour familiariser le lecteur avec les arêtes de rebroussement, un exemple plus usuel que les deux précédens, c'est celui d'une surface conique. En effet, un cône est l'enveloppe d'un plan mobile suivant une certaine loi ; ses élémens sont les caractéristiques de cette enveloppe, et son sommet, qui est le lieu des intersections consécutives ou des contacts consécutifs des élémens, est une arête de rebroussement. Mais quoique le sommet d'un cône présente quelque analogie avec les arêtes de

rebroussement, on ne reconnaît pas que les deux nappes soient normales à une même surface, au dehors de laquelle elles soient situées, en sorte que l'exemple du cône, loin d'être propre à éclaircir la théorie qui nous occupe, a besoin lui-même d'être éclairci.

763. Soit LM une droite assujettie à se mouvoir sur l'hélice MNOPQ..., et sur l'axe IK, de manière à couper toujours cet axe sous un angle constant projeté en ILM. La surface produite sera l'héliçoïde gauche examiné précédemment (724). Cela posé, concevons qu'un plan se meuve dans l'espace de manière à toucher toujours cet héliçoïde suivant un point de la directrice MNOPQ...; l'enveloppe produite par le mouvement de ce plan sera une surface développable; l'angle de l'enveloppée et de l'axe IK sera constant; toutes les caractéristiques seront placées de la même manière par rapport à cet axe, et la courbe suivant laquelle elles se couperont sera une hélice de même pas que MNOPQ... : donc l'enveloppe engendrée sera un héliçoïde développable (265). Donc cette enveloppe présentera deux nappes distinctes, qui se réuniront par un véritable rebroussement (264). Pl. 58.

Or, si l'on imagine que l'angle ILM, de la génératrice de l'héliçoïde gauche avec l'axe IK, reste constant, et que le pas de l'hélice MNOPQ... devienne nul, cette hélice se changera en un cercle, dont le rayon sera la perpendiculaire abaissée du point M sur l'axe IK; l'hélice arête de rebroussement de la surface développable se contractera en un point de cet axe, et l'enveloppe produite par le mouvement du plan mobile ne sera autre chose qu'un cône ayant ce point pour sommet et pour base le cercle passant par le point M. D'où nous conclurons que le sommet d'un cône est bien une arête de rebroussement; seulement elle présente la singularité d'être contractée en un seul point.

Nous ne nous étendrons pas davantage sur la théorie des surfaces enveloppes, ce qui précède la fera sans doute suffisamment connaître.

CHAPITRE III.

Des tangentes, des rayons de courbure, et des développées des lignes courbes.

764. En traitant des lignes courbes dans le livre Ier, nous avons dû laisser incomplet tout ce qui exigeait des théories que nous ne pouvions pas encore exposer. Nous allons revenir ici sur ces lignes, et après avoir résolu les problèmes que présente la question des tangentes, nous nous occuperons des rayons de courbure et des développées des lignes courbes.

765. DES TANGENTES. Il y a dans le livre Ier deux questions importantes que nous n'avons pas résolues, l'une est de mener la tangente à une courbe

37..

connue, par un point donné sur cette courbe (94), l'autre de trouver le point de contact d'une tangente et de la courbe qu'elle touche, en supposant cette tangente menée par des considérations quelconques (108). La théorie des plans tangens aux surfaces gauches va nous donner le moyen de les résoudre toutes les deux.

766. PROBLÈME 1er. *Une ligne courbe quelconque, soumise ou non à la loi de continuité, étant donnée avec un de ses points, mener par ce point une tangente à cette courbe.*

Imaginons que l'on mène deux droites quelconques dans l'espace, et que l'on prenne ces deux droites, et la courbe donnée, pour directrices d'une surface gauche : on saura mener par le point donné un plan tangent à cette surface (697). Mais ce plan contiendra la tangente cherchée ; si donc cette courbe est plane, l'intersection de son plan avec le plan tangent sera la tangente demandée.

Si cette même courbe n'est pas plane, on pourra mener deux nouvelles droites dans l'espace ; on les prendra avec la courbe donnée pour directrices d'une nouvelle surface gauche ; on menera par le point donné un plan tangent à cette surface, ce plan contiendra aussi la tangente demandée : donc cette tangente sera l'intersection des deux plans tangens construits.

Cette belle solution est de M. Hachette.

767. Pour l'appliquer avec quelque facilité, on pourra, pour chaque surface gauche auxiliaire, substituer un plan directeur à l'une des directrices droites menées arbitrairement dans l'espace ; les surfaces auxiliaires deviendront des conoïdes, et les constructions seront beaucoup plus simples. C'est ce qu'un exemple va développer.

Pl. 61. 768. Soit (ABC, A'B'C') une courbe quelconque à laquelle on veut mener une tangente par le point (B, B').

Nous allons faire passer par cette courbe deux conoïdes auxiliaires, nous leur menerons des plans tangens, par la méthode exposée n° 330, et l'intersection de ces plans sera la tangente demandée.

Prenons la droite DE, située dans le plan vertical, pour directrice du premier conoïde, et supposons que sa génératrice se meuve parallèlement au plan horizontal. L'élément du conoïde, correspondant au point (B, B'), sera celui dont la projection horizontale est DB, et dont la projection verticale est la droite D'B', parallèle à la ligne de terre. Par cet élément, menons un plan quelconque (GF, FD') ; il coupera le conoïde suivant une courbe, et l'on sait qu'il le touchera au point où cette courbe et l'élément (DB, D'B') se rencontreront (245). On va voir que pour résoudre le problème proposé, il ne sera pas nécessaire d'avoir les deux projections de cette courbe.

Menons, au-dessus et au-dessous de l'élément (DB, D'B'), une suite de plans horizontaux $m'x'$, $n'y'$, $o'z'$, $p'w'$, etc. ; ces plans couperont les surfaces du conoïde et du plan (GF, FD')

suivant des droites $(mr, m'x')$ et $(Dx, d'x')$, $(ns, n'y')$ et $(Dy, d'y')$, $(ot, o'z')$ et $(Dz, d''z')$, Pl. 61.
$(pu, p'w')$ et $(Dw, d'''w')$, etc., qui se couperont deux à deux suivant des points de l'intersection de ces surfaces. Mais ces points seront projetés horizontalement en *r*, *s*, *t*, *u*, etc.; si donc on mène la courbe *rstu*, le point K, où elle coupera la droite DB, sera la projection horizontale du point où le plan (GF, FD′) touche le conoïde.

Pour opérer le plus simplement possible, on menera par ce point de contact projeté en K, et dans le plan (GF, FD′), une droite projetée en KH, parallèle au plan vertical, et l'on prendra cette droite, et la droite (D, DE), pour directrices d'un paraboloïde hyperbolique ayant pour plan directeur le plan horizontal. Ce paraboloïde sera tangent au conoïde en K et en (D, D′), et conséquemment tout le long de l'élément (BD, B′D′) (695). Ainsi, en menant par le point (B, B′) un plan tangent au paraboloïde, ce plan touchera le conoïde et contiendra la tangente demandée.

La droite KH étant située dans le plan (GF, FD′) perce en H le plan horizontal; donc la droite DH, située dans ce dernier plan, est un élément du paraboloïde. Menons par le point (B, B′) le plan BI parallèle aux deux directrices KH, (D, DE); il coupera les élémens (BD, B′D′) et DH en deux points (B, B′) et I, qui appartiendront à l'élément de la seconde génération du paraboloïde (225). Or, cet élément est dans le plan tangent en (B, B′); donc ce plan aura pour trace horizontale la droite MO, menée par la trace I de l'élément de la seconde génération, parallèlement à BD: et comme sa trace verticale ON′ doit contenir le point D′, ce plan (MO, ON′) sera entièrement déterminé.

Prenons pour second conoïde auxiliaire celui qui est engendré par une droite, toujours parallèle au plan vertical de projection, et assujettie à toucher constamment la courbe donnée (ABC, A′B′C′) et la droite horizontale (LL′, L′). On menera par le point donné (B, B′), l'élément (LB, L′B′) du conoïde; on fera passer par cet élément un plan quelconque (LP, PQ); on cherchera la projection verticale *abkfh* de l'intersection de ce plan avec le conoïde, cette ligne *abkfh*, et la droite L′B′, se couperont en un point *k*, et ce point sera la projection verticale du point où le plan (LP, PQ) touche le conoïde.

Par le point *k*, ainsi construit, on menera la droite *k*R parallèle à la ligne de terre; elle coupera la trace PQ du plan (LP, PQ) en un point R; on prendra la droite menée par le point de contact projeté en *k*, et par le point R du plan vertical, pour directrice d'un paraboloïde hyperbolique ayant pour plan directeur le plan vertical, et pour seconde directrice la droite (LL′, L′): ce paraboloïde touchera le conoïde tout le long de l'élément (LB, L′B′); ainsi le plan tangent en (B, B′), au paraboloïde, touchera le conoïde au même point (B, B′). Pour avoir ce plan, on menera par le point B′ un plan B′S, parallèle aux deux directrices du paraboloïde; il coupera les élémens (LB, L′B′), (L′P, L′S), en deux points (B, B′) et S, qui détermineront l'élément de la seconde génération correspondant au point (B, B′). Par cet élément et par (LB, L′B′) on menera le plan (LT, TN′), et ce plan, tangent en (B, B′) au second conoïde auxiliaire, contiendra la tangente demandée.

Enfin connaissant les deux plans (MO, ON′), (MT, TN′), on construira leur intersection (MN, *o*N′), et cette intersection sera la ligne droite tangente en (B, B′) à la courbe donnée.

769. Pour que cette tangente soit bien menée, il faut principalement que les points K et *k* soient exactement déterminés. Cela exige que l'on construise les lignes *grstuv*, *abkfh*,

Pl. 61. dans une grande étendue, afin que l'on connaisse bien leur forme générale, et qu'elle puisse servir à corriger les légères erreurs qui pourraient déranger sensiblement la position des petits arcs *sKt*, *bkf*, sur lesquels sont les points K et *k*.

770. Le procédé que l'on vient d'exposer est d'un emploi pénible, à cause du grand nombre de lignes qu'il exige; toutefois il serait aussi exact, entre les mains des praticiens habiles, que les autres méthodes graphiques qu'ils emploient. (*Voyez* la Note 8, n° 918.)

Mais c'est principalement sous le rapport de la Géométrie spéculative que M. Hachette a rendu un grand service à la science, parce que la proposition qu'il a trouvée remplit une lacune où la Géométrie empruntait nécessairement le secours de l'Analyse, tant pour mener des tangentes aux lignes, et des plans tangens aux surfaces, que pour obtenir les rayons de courbure et les développées des lignes courbes (*voyez* la suite de ce chapitre).

771. *Problème 2. Une courbe ayant été tracée d'une manière quelconque, et la direction d'une de ses tangentes étant donnée, on demande le point de contact de cette tangente.*

Pour résoudre ce problème, on menera dans l'espace une droite dirigée dans un sens très différent de celui de la tangente donnée; on imaginera qu'un conoïde passe par cette droite et par la courbe donnée; on prendra ensuite sur cette courbe un nombre suffisant de points, par chacun desquels on menera un élément du conoïde et une parallèle à la tangente donnée; par chacun des élémens obtenus, et par la parallèle correspondante, on menera un plan, et l'on construira le point où il touchera le conoïde (245). La suite des points de contact, ainsi déterminés, formera sur le conoïde une ligne, qui coupera évidemment la courbe donnée suivant le point demandé.

772. DES RAYONS DE COURBURE *des lignes courbes*. Jusqu'ici nous n'avons guère parlé que des rayons de courbure des lignes planes (97-106); nous allons à présent considérer ces rayons plus spécialement par rapport aux courbes à double courbure.

Pour une courbe plane, chaque rayon de courbure est coupé par celui qui le précède, et par celui qui le suit, suivant deux centres de courbure, et la suite de ces centres est la développée de cette courbe. Il n'en est pas ainsi pour une courbe à double courbure; car deux centres de courbure
Pl. 62. Fig. 1. consécutifs *m* et *n* sont dans deux plans osculateurs consécutifs *m*AB, *n*BC, qui correspondent à trois élémens A, B, C, de la courbe, et qui sont tels que si la droite que déterminent ces deux centres, était normale à cette courbe, elle le serait suivant l'élément B : or, cet élément et cette normale détermineraient le plan osculateur qui passe par A et B; le même élément B et la même normale détermineraient le plan osculateur qui passe par B et C; donc ces deux plans osculateurs se confondraient, ce qui ne peut arriver en général que dans le cas d'une courbe plane.

Il suit de là que les normales *mm'*, *nn'*, *oo'*, *pp'*, etc., d'une courbe à double courbure ABCDE...., menées par les centres *m*, *n*, *o*, *p*, etc.,

des cercles osculateurs de cette courbe, ne sont pas deux à deux dans le même plan; donc la surface qu'elles forment est une surface gauche (214).

773. Ainsi, toutes les courbes possibles n'ont véritablement qu'une seule courbure en chacun de leurs points; et sous ce rapport les courbes planes ne diffèrent des courbes à double courbure qu'en ce que les premières ont toutes leurs courbures dans le même plan, et que le plan des courbures des dernières varie continuellement.

D'après cela, deux courbures consécutives des courbes à double courbure n'étant pas dans un même plan, on pourrait donner à ces courbes le nom de *courbes gauches* (*), comme on nomme *surfaces gauches* les surfaces produites par une droite mobile dont deux positions consécutives ne sont pas dans le même plan.

774. Maintenant, quelle que soit une ligne courbe, on remarquera, 1°. que le rayon de courbure qui correspond à chacun de ses points se trouve toujours déterminé par l'angle infiniment petit des deux plans normaux consécutifs qui correspondent à ce point: nous donnons à cet angle le nom d'*angle de courbure* (98); 2°. que ce qui fait qu'une courbe *non plane*, ou comme on dit à double courbure, change de plan à chaque élément, est, comme on doit le sentir et comme on le verra clairement tout à l'heure, une sorte de torsion de ses élémens les uns autour des autres, torsion qui est déterminée par l'angle infiniment petit des deux plans osculateurs consécutifs: nous nommerons cet angle, *angle de torsion* (**).

775. Cela posé, soit V une courbe à double courbure; supposons-la divisée en élémens égaux et infiniment petits a, b, c, d, etc.: soient A, B, C, etc., ses centres de courbure, le premier A correspondant aux élémens a et b, le second B correspondant aux élémens b et c, etc., et demandons-nous comment il faudrait plier une ligne droite L, divisée en élémens infiniment petits a', b', c', d', etc., égaux à l'élément a, pour que cette ligne pût coïncider avec la courbe V.

D'abord nous plierons les élémens a', b', c', d', etc., de la droite flexible L, autour des extrémités les uns des autres, de manière que cette droite se change en une courbe V', dont les centres de courbure A', B', C', etc., soient placés par rapport aux élémens a', b', c', d', etc., comme les centres A, B, C, etc., sont placés par rapport aux élémens respectifs a, b, c, d, etc.: c'est-à-dire que les deux courbes V et V' auront respectivement

(*) Le mot *gauche* n'est pas agréable à l'oreille; mais il est essentiel en Géométrie, et il donne parfaitement l'idée qu'il doit donner.

La dénomination de *courbe à double courbure* est non-seulement longue, désagréable et embarrassante, mais elle donne encore l'idée spécieuse et fausse de deux courbures qui n'existent pas: il serait à désirer qu'on cessât de l'employer.

(**) On l'a aussi nommé *angle de flexion*, et l'angle de courbure *angle de contingence*. Voyez sur ces dénominations la note du n° 776.

les mêmes angles de courbure, et par conséquent les mêmes rayons de courbure.

Ensuite, sans changer rien aux courbes V et V′, nous pourrons superposer les élémens a' et b', et le centre de courbure A′ qui leur correspond, sur leurs analogues a, b et A, de la courbe V. Cela fait, il s'agira de savoir comment il faut plier l'élément c', autour du point parlequel il s'unit à l'élément b', pour qu'il vienne coïncider avec l'élément c. Or, l'élément c fait avec l'élément b prolongé un angle égal à l'angle de courbure de b et c, et toutes les droites qui partent de l'extrémité de l'élément b, et qui s'écartent de cet élément sous ce même angle, forment une petite surface conique droite dont l'élément c fait partie : si donc on fait mouvoir le plan des deux élémens b' et c' et du point B′, autour de l'élément b qui coïncide avec b', l'élément c' ne quittera pas cette petite surface conique, et il viendra coïncider avec l'élément c, lorsque le plan des élémens b' et c' fera avec celui des élémens a' et b', l'angle de torsion qui correspond aux élémens a et b d'une part, b et c d'autre part. Les trois élémens a', b', c', coïncidant avec a, b, c, et les centres A′ et B′ avec A et B, on amenera de même l'élément d' sur l'élément d, et en même temps le centre C′ sur le centre C, en faisant tourner le plan des élémens c' et d' autour de l'élément c, confondu avec c', jusqu'à ce que le plan de c' et d' fasse avec celui de b' et c', l'angle de torsion correspondant aux élémens b et c, d'une part, c et d, d'autre part.

On continuerait de la même manière pour amener la courbe V′ à coïncider dans toute son étendue avec la courbe V; et l'on voit que chaque élément de V′ éprouverait un petit mouvement de torsion (*voyez* la note ci-après) autour de l'élément précédent, et que ce mouvement, par un déplacement infiniment petit, porterait le centre de courbure correspondant, du plan osculateur précédent dans le plan osculateur suivant.

Il est clair que c'est en vertu de ces déplacemens successifs des centres de courbure A′ B′, C′, etc., que les normales de la courbe V′, qui étaient rencontrées chacune par la normale précédente et par la normale suivante, ne le sont plus pour la courbe V, et forment une surface gauche (772).

De même qu'on obtient la courbe V au moyen de la courbe V′, on pourrait obtenir aussi la courbe V′ au moyen de la courbe V. Pour cela, il ne s'agirait que de développer la surface développable qui a pour arête de rebroussement la courbe V. Dans ce développement, les élémens de la courbe V éprouveraient des torsions infiniment petites; les angles de courbure ne changeraient pas, parce que chaque élément décrirait une surface conique autour de l'élément précédent; les centres de courbure A, B, C, etc., viendraient se placer par la réduction des angles successifs de torsion à zéro, dans le plan du développement, et la transformée de la courbe V serait la courbe V′.

776. Enfin il est évident que, sans changer les angles de courbure, on peut former avec la courbe V, en changeant la loi des angles de torsion, une infinité de courbes à double courbure et une courbe plane V′. De même avec la courbe V′, et au moyen de torsions qui feront de ses normales une surface gauche, on pourra former une infinité d'autres courbes. D'où l'on voit que les angles de courbure et les angles de torsion sont des angles indépendans (*).

(*) D'après ce qu'on vient de voir, les dénominations d'*angle de courbure* et d'*angle de torsion*, pa-

777. *Problème 1er. Étant donnée une courbe à double courbure* V, *et un point* P *de cette courbe, on demande le plan osculateur qui correspond à ce point.*

Pour résoudre cette question, on prendra plusieurs points sur la courbe; par ces points, et par le point P, on menera les tangentes correspondantes (766); on déterminera les points où elles perceront l'un des plans de projection, le plan horizontal par exemple, et l'on décrira la trace T, qui sera le lieu de ces points. Cela fait, p étant le point où la tangente en P perce le plan horizontal, on menera par le point p une tangente θ à la courbe T, et le plan qui passera par cette tangente et par le point P sera le plan osculateur demandé. En effet, les tangentes menées à la courbe donnée seront les élémens de la surface développable dont cette courbe serait l'arête de rebroussement (260), et le plan mené par la tangente θ et par le point P sera l'enveloppée correspondante à ce point.

778. *Problème 2. Étant donnés une courbe quelconque et un de ses points, on demande le rayon de courbure qui correspond à ce point.* Pl. 62. Fig. 2.

On commencera par déterminer le plan osculateur correspondant au point donné n (777), et l'on construira sur ce plan la projection $cmnoz$, de la courbe donnée. On prendra ensuite plusieurs points sur cette projection; par ces points on menera les normales correspondantes à la même projection; on décrira la développée UOG qu'elles détermineront; enfin on construira (771) le point O, où la normale nO, correspondante au point donné n, touchera la courbe UOG, et la partie nO de cette normale sera le rayon de courbure cherché.

Pour le démontrer, soient mn et no les deux élémens infiniment petits, de la courbe donnée, par lesquels passe le plan osculateur qui sert de plan de projection, et élevons par les milieux de ces élémens les droites $\alpha\zeta$, $\gamma\delta$, qui leur sont perpendiculaires; on sait que ces droites se couperont au centre de courbure de l'arc mno, mais il est clair qu'elles

---

raîtront naturelles. En effet, en pliant une ligne en un point, on lui fait subir une flexion, qui n'est autre chose qu'une courbure, quand la flexion est infiniment petite et que les points voisins en éprouvent d'analogues; et lorsque sans rien changer aux élémens consécutifs a, b, c, d, ... m et n, de cette ligne, et sans faire varier l'angle des deux élémens m et n, on change le plan de ces élémens, c'est par une véritable torsion de l'élément n autour de l'élément m.

Ces dénominations ont d'ailleurs l'avantage de conduire à la propriété qui distingue les courbes non planes des courbes planes, et qui consiste en ce que les premières présentent en chaque point une courbure et une torsion, tandis que les dernières ne présentent que des courbures.

Le nom d'angle de flexion donné à celui que nous appelons l'angle de torsion, a le défaut de s'appliquer naturellement à l'angle de courbure. D'un autre côté, si l'on courbe le plan d'une ligne P autour des normales consécutives de cette ligne, la ligne P se changera en une autre ligne Q, dont la première sera la transformée (426): or dans cette opération, le plan de deux normales consécutives aura subi une véritable flexion autour de chacune d'elles; les angles de ce plan avec ses voisins seront donc des angles de flexion correspondans à des élémens de la courbe Q. Donc on sera induit en erreur, si l'on adopte le nom d'angle de flexion pour les angles de torsion; car ce nom s'appliquera naturellement à la courbe Q, et ne devra cependant s'entendre que de l'arête de rebroussement de la surface développable formée en courbant le plan de la ligne P.

Nous remarquerons, en passant, qu'en courbant ce plan on a augmenté les angles de courbure de la ligne P; et comme elle a ses angles de torsion nuls, les courbes P et Q diffèrent entièrement, et par rapport aux angles de courbure, et par rapport aux angles de torsion.

Pl 62. Fig. 2. se couperont sur la courbe UOG; donc, etc. (*Voyez*, n°. 780, un second moyen de solution) (*).

Si la courbe donnée était plane, on serait dispensé de construire le plan osculateur correspondant au point donné.

779. DES DÉVELOPPÉES. « Si l'on conçoit une droite menée par le centre d'un cercle perpendiculairement à son plan, et indéfiniment prolongée de part et d'autre, on sait que chacun des points de cette droite sera à égales distances de tous les points de la circonférence; que, par conséquent, si l'on imagine qu'une seconde droite, terminée d'un bout à un des points de la circonférence, et de l'autre à un point quelconque de la perpendiculaire, tourne autour de cette dernière comme axe, en faisant constamment le même angle avec elle, son extrémité mobile décrira la circonférence de cercle avec la même exactitude que si l'on eût fait tourner le rayon autour du centre. La description du cercle au moyen du rayon, et qui n'est qu'un cas particulier de la première, par sa simplicité est plus propre à donner l'idée de l'étendue du cercle : mais, s'il ne s'agit que de description, la première peut dans certains cas avoir de l'avantage, parce qu'en prenant sur l'axe deux pôles placés de part et d'autre du plan du cercle, puis menant par ces deux points deux droites qui se couperaient en un point de la circonférence, et faisant ensuite mouvoir le système de ces deux droites autour de l'axe de manière que leur point d'intersection fût fixe sur l'une et sur l'autre, ce point décrirait la circonférence du cercle, sans qu'il eût été nécessaire d'exécuter auparavant le plan dans lequel elle doit se trouver.

Fig. 3. 780. » Soit KA*a*D une courbe à double courbure quelconque tracée dans l'espace. Par un point A de cette courbe soit conçu un plan MNOP perpendiculaire à la tangente en A; par le point *a* infiniment proche, soit pareillement imaginé un plan *mn*OP perpendiculaire à la tangente en *a*; ces deux plans se couperont en une droite OP qui sera l'axe du cercle, dont le petit arc A*a* de la courbe peut être censé faire partie : de manière que si, des points A, *a*, l'on abaisse deux perpendiculaires sur cette droite, ces perpendiculaires, égales entre elles, la rencontreront en un même point G, qui sera le centre de ce cercle. Tous les autres points g, g', g''... de cette droite seront chacun à égales distances de tous les points de l'arc infiniment

(*) Le lecteur verra avec intérêt, dans les Annales mathématiques, ce que M. Dupin a écrit sur les deux problèmes précédens.

petit Aa, et pourront par conséquent en être regardés comme les pôles. Pl. 6. Fig. 3.
Ainsi, si d'un point quelconque g de cet axe, on mène deux droites aux points A, a, ces droites gA, ga, seront égales entre elles, et formeront avec l'axe des angles AgO, agO, égaux entre eux : en sorte que si l'on voulait définir la courbure de la courbe au point A, il faudrait donner la longueur du rayon de courbure AG, et que s'il s'agissait d'assigner le sens de la courbure, il faudrait donner la position du centre G dans l'espace. Mais s'il est simplement question de décrire le petit arc, il suffira également ou de faire tourner la droite Ag autour de l'axe, sans altérer l'angle AgO qu'elle fait avec lui, ou de faire tourner le rayon de courbure AG perpendiculairement à cet axe.

» Ainsi, la droite OP peut-être regardée comme la ligne des pôles de l'élément Aa; le centre de courbure de cet élément est celui de ses pôles dont la distance à l'élément est un *minimum ;* enfin, son rayon de courbure est la perpendiculaire AG, abaissée de l'élément sur la ligne des pôles.

781. » Que l'on fasse actuellement sur tous les points de la courbe à Fig. 4.
double courbure, la même opération que l'on vient de faire sur un de ses élémens, c'est-à-dire que par tous les points consécutifs A, A′, A″, A‴, etc., l'on fasse passer des plans MNOP, perpendiculaires chacun à la tangente de la courbe au point où il la coupe; le premier de ces plans rencontrera le second dans une droite OP qui sera le lieu géométrique des pôles de l'arc AA′; le second rencontrera le troisième dans une droite O′P′, lieu des pôles de l'arc A′A″, et ainsi de suite. Il est évident que le système de toutes les droites d'intersection, ou la surface courbe qu'elles forment par leur assemblage, sera le lieu géométrique des pôles de la courbe KAD; car cette courbe n'aura point de pôle qui ne soit sur la surface, et cette surface n'aura pas de point qui ne soit le pôle de quelqu'un des élémens de la courbe.

782. » Du point A de la courbe, par lequel passe le premier plan normal MNOP, soit menée dans ce plan, et suivant une direction arbitraire, une droite Ag jusqu'à ce qu'elle rencontre la section OP quelque part en un point g; par les points A′, g, soit menée dans le second plan normal, la droite $A'g$ prolongée jusqu'à ce qu'elle rencontre la section O′P′ en un point g'; soit pareillement menée $A''g'g''$, et ainsi de suite. La courbe qui passe par tous les points g, g', g'', etc., est une développée de la courbe KAD : car toutes les droites Ag, $A'g'$, $A''g''$, sont les tangentes de la courbe

38..

Pl. 62. Fig. 4. $gg'g''$, puisqu'elles sont les prolongemens des élémens de cette courbe. De plus, si l'on conçoit que la première Ag tourne autour de OP, comme axe, pour venir s'appliquer sur la suivante $A'g$, elle n'aura pas cessé d'être tangente à la courbe $gg'g''$; et son extrémité A, après avoir parcouru l'arc AA', se confondra avec l'extrémité A' de la seconde. Que l'on fasse de même tourner la seconde ligne $A'g'$ autour de O'P', comme axe, pour qu'elle vienne s'appliquer sur la troisième $A''g'$, elle ne cessera pas de toucher la courbe $gg'g''$, et son extrémité A' ne sortira pas de l'arc A'A'', et ainsi de suite. Donc la courbe $gg'g''$ est telle, que si l'on conçoit qu'une de ces tangentes tourne autour de cette courbe sans cesser de lui être tangente, et sans avoir de mouvement dans le sens de sa longueur, un des points de cette tangente décrira la courbe KAD; donc elle est une de ses développées. Mais la direction de la première droite Ag était arbitraire; et suivant quelque autre direction qu'on l'eût menée dans le plan normal, on aurait trouvé une autre courbe $gg'g''$ qui aurait été pareillement une développée de la courbe KAD. Une courbe quelconque a donc une infinité de développées qui sont toutes comprises sur une même surface courbe.

783. » Les droites $A'g'$ et $A''g'$ forment des angles égaux avec la droite O'P'; et l'élément $g'g''$ étant le prolongement de la droite $A''g'$, il s'ensuit que les deux élémens consécutifs gg', $g'g''$, de la développée $gg'g''$, forment des angles égaux avec la droite O'P' qui passe par leur point de rencontre. Or, lorsqu'on développe la surface pour l'appliquer sur un plan, les élémens de la développée ne cessent pas de faire les mêmes angles avec la droite O'P'; donc deux élémens consécutifs de la courbe $gg'g''$, considérés dans la surface étendue sur un plan, forment des angles égaux avec une même ligne droite, donc ils sont dans le prolongement l'un de l'autre. Il suit de là, que chacune des développées d'une courbe à double courbure devient une ligne droite, lorsque la surface qui les contient toutes est étendue sur un plan; donc elle est sur cette surface la plus courte que l'on puisse mener entre ses extrémités.

784. » On déduit de là un moyen facile d'obtenir une quelconque des développées d'une courbe à double courbure, lorsqu'on a un modèle de la surface développable qui les contient toutes. Pour cela, il suffit de mener par un point de la courbe un fil tangent à la surface, et de plier ensuite ce fil sur la surface en le tendant : car, en vertu de la tension, il prendra la direction de la courbe la plus courte entre ses extrémités; il se pliera par conséquent sur une des développées.

785. » On conçoit d'après cela, comment il est possible d'engendrer, par un mouvement continu, une courbe quelconque à double courbure; car, après avoir exécuté la surface développable, touchée par tous les plans normaux de la courbe; si, du point donné dans l'espace, et par lequel la courbe doit passer, on dirige deux fils tangens à cette surface; et si, après les avoir pliés ensuite sur la surface en les tendant, on les fixe par leurs autres extrémités; le point de réunion des deux fils, qui aura la faculté de se mouvoir avec le plan tangent à la surface, sans glisser ni sur l'un des fils, ni sur l'autre, engendrera, dans son mouvement, la courbe proposée. Pl. 62. Fig. 4.

786. » Tout ce que nous venons de dire par rapport aux courbes à double courbure, convient également aux courbes planes, avec cette différence seulement, que tous les plans normaux étant perpendiculaires au plan de la courbe, toutes les droites de leurs intersections consécutives sont aussi perpendiculaires au même plan, et par conséquent parallèles entre elles. La surface développable, touchée par tous ces plans normaux, est donc alors une surface cylindrique, dont la section perpendiculaire est la développée ordinaire de la courbe. Mais cette surface cylindrique contient de même toutes les développées à double courbure de la même courbe; et chacune de ces développées fait, avec toutes les droites génératrices de la surface cylindrique, des angles constans. Le filet d'une vis ordinaire est une des développées de la développante du cercle qui sert de base à la surface cylindrique sur laquelle il se trouve; et quelle que soit la hauteur du pas de la vis, si le diamètre du cylindrique ne change pas, le filet sera toujours une des développées de la même courbe. »

D'après tout ce qui vient d'être dit, il sera possible de résoudre graphiquement le problème suivant.

787. *Problème général. Étant donnée une courbe quelconque, on demande de construire une ou plusieurs de ses développées.*

Pour résoudre cette question, on commencera par déterminer la surface développable qui est le lieu des développées de la courbe donnée. On menera ensuite un nombre suffisant de plans normaux à cette courbe; puis, ayant construit leurs traces horizontales et verticales, on menera une première ligne tangente aux traces horizontales, une seconde ligne tangente aux traces verticales, et ces deux lignes seront évidemment les traces de la surface cherchée.

Lorsqu'elles seront connues, on déterminera les points de contact suivant lesquels elles toucheront les deux traces de chaque plan normal (771); par ces deux points on menera une droite, et cette droite sera l'un des élémens du lieu des développées. On construira autant

de ces élémens qu'on en voudra, et l'on en déduira la représentation de la surface développable dont il s'agit.

788. Cela fait, on prendra un point quelconque sur la courbe donnée, et l'on menera par ce point une tangente à la surface développable construite; le point de contact de cette tangente appartiendra à une des développées de la courbe donnée, et c'est cette développée qu'on se proposera de construire. On exécutera pour cela le développement du lieu des pôles de la courbe donnée; chaque développée sera une droite sur ce développement; il ne s'agira donc que de rapporter sur ce même développement la tangente menée, et le prolongement indéfini de cette tangente coïncidera avec la transformée de la développée cherchée, en sorte qu'en rapportant cette développée sur la surface développable que composent les développées, on aura la développée demandée.

789. Si au lieu de mener par le point pris sur la courbe donnée une seule tangente à la surface développable représentée, on en menait plusieurs, il y aurait une développée correspondante à chacune, et ces développées se construiraient par le moyen qui vient d'être exposé.

Pl. 64. Fig. 1. 790. 1er *Exemple*. Cherchons une des développées de la courbe d'intersection de la sphère {(A, A′), (FG, G′E′F′)}, avec le cylindre perpendiculaire au plan vertical de projection, dont l'axe est (HI, H′), et qui a pour trace verticale le demi-cercle F″K′E″.

Cette courbe aura pour projection verticale l'arc F′K′E′, et il faudra d'abord en construire la projection horizontale. Pour cela, on prendra un point quelconque M′, sur la projection verticale connue, et l'on remarquera que les points correspondans de l'intersection sont sur un cylindre droit, dirigé horizontalement, dont la base est le cercle B′M′, décrit du point A′ comme centre. Ce cylindre coupera la sphère suivant deux cercles verticaux parallèles au plan vertical de projection. Les traces des plans qui les contiendront seront faciles à obtenir, et la droite BM en sera une. Or, les points de la sphère projetés en M′ appartiendront nécessairement, chacun, à un de ces cercles; donc les projections horizontales de ces points seront sur les traces des plans de ces mêmes cercles: ainsi (M, M′) sera l'un des points de la courbe d'intersection cherchée; d'où l'on voit qu'il sera aisé de construire la projection EMFR′ de cette courbe.

791. Il s'agira maintenant de mener des plans normaux à la ligne (EMFR′, F′K′E′), et de construire la surface développable qu'ils enveloppent. Nous remarquerons d'abord que tous les plans passant nécessairement par le centre (A, A′) de la sphère donnée, cette surface ne peut être qu'un cône dont le sommet soit (A, A′) (*). Or, si l'on construit les traces horizontales AH, NO, PQ, RS, AT, d'un assez grand nombre de plans, normaux à la courbe (EMFR′, F′K′E′), suivant certains points (E, E′), (L, L′), (M, M′), (U, U′) et (V, V′), choisis arbitrairement sur cette courbe, toutes ces traces détermineront une ligne...HXYST..., qui sera la trace horizontale du cône, lieu des développées de (EMFR′, F″K′E′), et qui déterminera ce cône, sans qu'on ait besoin de traces verticales des plans normaux.

792. Quant aux traces horizontales AH, NO, PQ, RS, AT, voici comment on les ob-

(*) En général le lieu des pôles d'une courbe sphérique est toujours un cône.

tiendra. Opérons d'abord sur le point (M, M'). On menera par ce point un plan tangent (C'D', D'M'), au cylindre donné; puis on cherchera la trace horizontale H''C', d'un plan tangent en (M, M') à la surface sphérique : les traces H''C', D'C', se couperont en un point C', et la droite C'M, menée par ce point, sera la projection horizontale de la tangente en (M, M'), à l'intersection (EMFR', F'K'E'). Pl. 64. Fig. 1.

Pour que la figure soit claire, opérons actuellement sur le point (L, L'). Lorsqu'on aura la projection horizontale WL de la tangente en ce point, il sera très facile d'avoir la trace horizontale du plan normal en ce même point; parce qu'elle sera perpendiculaire à WL (66), et qu'il suffira conséquemment, pour pouvoir la construire, d'en obtenir un point. Si donc on fait attention que le plan normal cherché passe par (A, A'), et si l'on mène la droite (LA, L'A'), dont la trace horizontale est le point R; puis, par ce dernier point, la droite RS perpendiculaire à WL, cette droite RS sera la trace cherchée du plan normal en (L, L').

793. Si l'on donnait, au lieu du point (L, L'), un des quatre points singuliers projetés en E, V, F, R', les élémens de l'intersection (EMFR', F'K'E') étant horizontaux à l'endroit de ces points, les plans normaux correspondans seraient des plans verticaux. Il est aisé de voir que ces plans ont pour traces les droites AT et AH, menées par le point A, parallèlement et perpendiculairement à la ligne de terre.

794. La courbe donnée étant composée de quatre arcs pareils (EV, E'V'), (VF, V'F'), (FR', F'V'), (R'E, V'E'), la base du cône enveloppe des plans normaux sera composée de quatre arcs égaux à HXYST, qui se joindront suivant des points de rebroussement, tels que H et T, et qui seront situés chacun dans un des angles HAT, TAI, IAF, FAH. Il résulte de là que le cône, lieu des développées de la courbe donnée, est composé de quatre parties pareilles sur l'une desquelles il suffira d'opérer.

795. Ce cône, dont le centre est en (A, A'), et dont la trace est formée de quatre arcs, tels que HXYST, étant représenté, il faudra construire son développemnnt, ce qui n'exigera pas d'autres procédés que ceux indiqués n°s 629 et suivans.

On déterminera donc d'abord l'intersection de ce cône avec une sphère, par exemple avec la sphère donnée. Cette intersection sera composée de quatre branches de courbe, qui se réuniront suivant les points de rebroussement (G, G'), (*b*, *b'*), (*d*, *d'*), (*f*, *b'*), et dont l'une sera projetée horizontalement en *ba*G, et verticalement en *b'a'*G'. On rectifiera la projection horizontale *ba*G sur une droite *b''*G'', par le moyen de laquelle on construira facilement l'arc *b''a''*G'', égal en longueur à l'arc de courbe (*ba*G, *b'a'*G'). Fig. 1 et Fig. 2.

Enfin, ayant la véritable grandeur de cet arc, il n'y aura plus qu'à la porter sur un arc de cercle *f''e*, décrit d'un point quelconque C'' comme centre, avec le rayon C''*f''*=A'G', et le secteur indéfini *e*C''*f''* représentera tout-à-la-fois le développement de la nappe inférieure du cône, et celui d'une des quatre parties pareilles qui forment cette nappe. Le secteur opposé sera le développement de la nappe supérieure du même cône. Fig. 1 et Fig. 3.

796. Imaginons que ce développement soit fait sur le plan vertical AT tangent au cône : il sera facile de rapporter le point (E, E') de la courbe donnée sur ce développement. En effet, la perpendiculaire abaissée de ce point sur l'arête (AT, A'T') est égale à *g*E', et tombe sur cette arête en un point *g*, éloigné de A' de la longueur A'*g*; donc le point (E, E') doit se trouver sur le plan du développement en un point *e'*, tel que l'on ait C''*g'*=A'*g*, *g'e'*= *g*E' et C''*e'*=A'E.

Pl. 62. Fig. 3. Si par le point e' on mène une droite quelconque $e'H''$, la portion $H''h$ de cette droite, comprise entre les deux droites indéfinies $H''C''$, $T''C''$, représentera sur le développement de la surface conique, lieu des développées de la courbe donnée, une de ces développées, en sorte qu'il ne s'agira plus que de rapporter cette droite $H''h$ sur la surface conique, pour avoir la développée demandée.

797. Afin que les projections verticales de cette développée, de la courbe donnée, et de la surface conique lieu des développées, fassent à l'œil un effet satisfaisant, changeons le plan vertical de projection en un autre, oblique par rapport au premier.

Fig. 1, Fig. 3 et Fig. 4. Soient donc *mnop*, *m'n'o'p'*, les nouvelles projections de la courbe donnée, (A'', A''') le nouveau centre du cône lieu des développées, et (*qrst*, *q'r's't'*) la nouvelle trace horizontale de la surface de ce cône. Pour obtenir sur cette surface la développée de (*mnop*, *m'n'o'p'*), qui est en $H''h$ sur le developpement du cône {(A'', A'''), (*qrst*, *q'r's't'*)}, il faudra rapporter un certain nombre de points de la droite $H''h$ sur les élémens de ce cône auxquels ils appartiennent. Ainsi le point k appartient à l'élément (AY, A'Y'), qui s'est développé suivant $C''Y''$, et qui est projeté en ($A''y$, $A'''y'$), sur les nouveaux plans de projection : en portant donc la longueur $C''k$, de (A'', A''') en (u, u'), sur l'élément ($A''y$, $A'''y'$), on aura un point de la développée demandée (*quvxsx'zz'q*, *q'u'v'k'l's'z'q'*), et ses autres points se construiront tout aussi facilement.

Fig. 4. 798. Il est remarquable que cette courbe est composée de quatre arcs égaux (*qv*, *q'v'*), (*vs*, *v's'*), (*sz*, *s'z'*), (*zq*, *z'q'*), qui se réunissent suivant des points de rebroussement. Cela était facile à prévoir ; car la courbe donnée étant composée de quatre arcs égaux, il faut nécessairement que la développée soit composée aussi de quatre parties égales : et si l'on se rend compte du mouvement d'un fil qui engendrerait la courbe donnée en se développant de dessus la ligne demandée, on concevra qu'il faut que ces quatre parties soient réunies entre elles suivant quatre points de rebroussement. C'est ce qu'on va mieux voir tout à l'heure.

Fig. 1. 799. Les points T, S, Y, X et H, étant ceux où les traces AT, RS, PY, etc., touchent la base du cône qui est le lieu des développées, les élémens (AT, A'T'), (AS, A'S'), etc., sont ceux suivant lesquels les plans normaux menés à la courbe donnée, par les points (E,E'), (L, L'), (M,M'), (U, U') et (V, V'), touchent la surface de ce cône. Et les droites $C''T''$, $C''S''$, $C''Y''$, $C''X''$, $C''H''$, étant celles qui représentent ces mêmes élémens sur le développement de cette surface, il en résulte que les points h, i, k, l, H'', sont ceux suivant lesquels la développée demandée sera touchée par les directions du fil générateur de la courbe proposée, lorsqu'il passera par les points respectifs (E, E'), (L, L'), (M, M'), etc.

Fig. 1, Fig. 3 et Fig. 4. Il suit de là que les points h, i, k, l, H'', étant rapportés sur la développée obtenue, et les points (E, E'), (L, L'), (M, M'), etc., sur la courbe (*mnpq*, *m'n'p'q'*), les droites qui joindront un des premiers, et son correspondant parmi les derniers, seront des positions du fil qui, par son extrémité, engendrerait la courbe donnée, en se déroulant de dessus la développée demandée.

Fig. 1 et Fig. 4. D'après cela, il est assez facile de reconnaître les diverses positions de ce fil. Supposons qu'il ait son extrémité au point n' correspondant à (E, E'), il se trouvera tangent en v', à la développée; lorsqu'il décrira l'arc $n'O'P'Q'm'$, il coïncidera successivement avec les

lignes O'*i'*, P'*k'*, Q'*l'*, *m's'*, et se développera de dessus la branche *v'i'k'l's'* de la courbe demandée : arrivé à la position *m's'*, qui donne le point *m'* correspondant à (R', V'), il sera tout-à-la-fois tangent à la branche *v'i'k'l's'* et à la branche *s'z'*, et en continuant son mouvement, il se ployera sur cette dernière et décrira l'arc *m'p'* de la développante. Lorsqu'il sera en *p's'*, il touchera les branches *s'z'* et *z'q'*, et en se déployant de dessus cette dernière, il décrira l'arc *p'o'*; après quoi, se ployant sur *q'v'*, il achevera de décrire la courbe donnée. Pl. 64. Fig. 1 et Fig. 4.

Cet exemple montre bien clairement comment les points d'un fil ployé sur une ligne courbe, engendrent, lorsqu'il se déploie, des développantes de cette courbe. Comme il est important qu'on se familiarise avec toutes les générations difficiles des lignes et des surfaces ; parce que c'est le meilleur moyen de s'accoutumer à concevoir dans l'espace les opérations de la Géométrie, nous allons appliquer la recherche des développées des lignes, à un second exemple.

800. Toutefois nous ferons remarquer, avant de quitter celui qui nous occupe, que si l'on voulait obtenir le rayon de courbure correspondant à un point quelconque (M, M'), de la courbe donnée (EMFR', E'K'F'), il ne s'agirait que d'abaisser par le point (M, M') une droite perpendiculaire à l'axe (AS, A'S') des pôles de ce point : la partie de cette droite comprise entre le point (M, M'), et l'axe (AS, A'S'), serait le rayon cherché (780). Fig. 1.

801. 2ᵉ *Exemple*. Une hélice à base circulaire étant donnée, construire son rayon de courbure et l'une de ses développées.

Concevons qu'on fasse mouvoir un plan sur l'hélice donnée de manière qu'il soit constamment normal à cette hélice. Il est clair que les positions consécutives de ce plan se couperont deux à deux suivant une suite de droites, toutes disposées de la même manière par rapport à l'axe de l'hélice ; donc l'arête de rebroussement de la surface engendrée par ce plan sera une hélice : donc cette surface sera un héliçoïde developpable (265).

Si l'on construit plusieurs positions du plan normal, et que l'on mène une ligne tangente à leurs traces horizontales, cette ligne (263) sera la développante du cercle suivant lequel se projetera l'arête de rebroussement ; elle fera reconnaître ce cercle, et comme on sait développer un héliçoïde (638), la résolution du problème proposé n'exigera plus que des constructions aisées.

802. Pour les simplifier le plus possible, supposons que l'hélice donnée ait ses élémens inclinés à 45 degrés avec le plan horizontal, et soient ABCD..., A'B'C'D'..., les deux projections de cette hélice. Pl. 65. Fig. 1.

Décrivons l'hélice (*abcd*..., A'*b'c'd'*...), dont la projection horizontale *abcd*... coïncide avec le cercle ABCD, et dont la projection verticale est la sinusoïde A'*b'c'd'*..., symétrique de A'B'C'D'..., par rapport au plan vertical O'O"; menons par le point (A, A') le plan horizontal A'E'; construisons dans ce plan la développante (*ae*FE, A'E') du cercle ABCD...., et concevons dans l'espace l'héliçoïde développable, dont (*abcd*..., A'*b'c'd'*...) est l'arête de rebroussement, et dont la trace horizontale, sur le plan A'E', est nécessairement la développante (*ae*FE, A'E) : je dis que cet héliçoïde sera le lieu des développées de l'hélice (ABCD..., A'B'C'D'...).

Pl. 65. Fig. 1. En effet, considérons sur l'héliçoïde une enveloppée quelconque, par exemple, celle qui correspond au point (e, e') de l'arête de rebroussement : cette enveloppée sera la surface plane menée, normalement au cylindre vertical ABCD..., par la tangente $(ce, c'e')$ en (c, c'), à l'hélice $(abcd\ldots, A'b'c'd'\ldots)$, ou, ce qui revient au même, par cette tangente $(ce, c'e')$, et par la tangente en (e, e') à la développante (αeFE, AE). Or, cette enveloppée est évidemment normale à l'hélice (ABCD..., A'B'C'D'...), en un point (C, C'), situé vis-à-vis (c, c') : donc le plan mobile qui produit l'héliçoïde en question est successivement normal à l'hélice donnée suivant tous ses points ; donc, etc.

803. Nous pouvons déjà trouver le rayon de courbure de cette hélice ; car deux plans normaux consécutifs, qui la coupent suivant les points de l'élément infiniment petit qui passe en (A, A'), ont pour intersection la tangente en (a, a') à l'hélice $(abcd\ldots, A'b'c'd'\ldots)$: or, la perpendiculaire abaissée du point (A, A') sur cette intersection, c'est-à-dire le rayon de courbure demandé (780), est la droite horizontale (Aa, A') ; donc ce rayon est Aa. Ce qui montre qu'une hélice, inclinée à 45 degrés, a son rayon de courbure égal au double du rayon du cercle auquel elle correspond (*).

Fig. 1 et Fig. 2. 804. Cherchons maintenant la développée de l'hélice donnée. Pour cela, nous nous rappellerons ce qui a été dit n° 638 et suivans, et par les constructions indiquées sur l'épure, nous obtiendrons, fig. 2, le développement de l'héliçoïde. Le cercle $\alpha\beta\gamma\delta\ldots$ sera la transformée de l'hélice $(abcd\ldots, A'b'c'd'\ldots)$; les points $\alpha, \beta, \gamma, \delta\ldots$ seront les mêmes que (a, A'), (b, b'), (c, c'), (d, d'), et les tangentes au cercle $\alpha\beta\gamma\delta\ldots$, correspondantes à ces points, seront les élémens respectifs du lieu des développées de l'hélice donnée.

Fig. 1. Et si l'on fait attention que les enveloppées de l'héliçoïde, correspondantes aux points (a, A'), (b, b'), (c, c'), etc., coupent la courbe donnée en des points (A, A'), (B, B'), (C, C'), etc., qui sont les extrémités des rayons de courbure de l'hélice $(abcd\ldots, A'b'c'd'\ldots)$,
Fig. 2. on verra que tous les points de l'hélice donnée se trouvent en C″ sur le développement obtenu (**).

805. Cela posé, menons par le point C″ une droite indéfinie KL ; cette droite sera la transformée d'une développée de l'hélice donnée, et nous pourrons, avant de construire les projections de cette développée, connaître ses propriétés principales.

Nous remarquerons d'abord que l'hélice $(abcd\ldots, A'b'c'd'\ldots)$, ayant une longueur indéfinie, elle forme nécessairement sur le cercle $\alpha\beta\gamma\delta\ldots$ une infinité de circonvolutions ; que les deux nappes de l'héliçoïde répondent à chaque circonvolution, et que le développement obtenu ne pénètre pas dans le cercle $\alpha\beta\gamma\delta\ldots$ D'où il est aisé de conclure, 1°. que la développée KL est composée d'un nombre infini de couples de branches projetées en αL, et pareillement d'une infinité d'autres couples de branches projetées en IK ; 2°. que les deux points α et I, qui répondent à une même circonvolution de $\alpha\beta\gamma\delta\ldots$, réunissent, savoir : le premier α, une branche de la nappe supérieure et une branche correspon-

(*) En général, l'hélice donnée et l'hélice arête de rebroussement du lieu des développées sont sur deux cylindres différens, et le rayon de courbure demandé est la somme des rayons de courbure de ces cylindres.

(**) Ce résultat n'est pas particulier à l'exemple que nous traitons ; tous les points suivant lesquels une courbe donnée est coupée par ses plans normaux forment un seul et même point sur le développement de l'enveloppe de ces plans.

dante de la nappe inférieure, et le second I, pareillement une branche de la nappe supérieure et une branche de la nappe inférieure; 3°. enfin, que ces points de réunion α et I, rapportés sur ($abcd\ldots$, $A'b'c'd'\ldots$), seront des points de rebroussement. Pl 65. Fig. 1 et Fig. 2.

Remarquons maintenant que chaque élément γh, de la nappe supérieure de l'héliçoïde, donnera un point h de la développée. Or, à mesure que l'arc $\alpha\gamma$ s'approchera d'un quadrant, le point h s'éloignera du point α, et quand le point γ sera au point n, tel que $\alpha\beta\gamma\delta n = 90°$, l'élément γh coïncidera avec la droite MN, parallèle à KL : d'où il suit que le point h sera à une distance infinie du point α sur la droite C″L. L'élément $\gamma h'$, correspondant au même point γ, et situé sur la nappe inférieure de l'héliçoïde, n'aura pas de points sur la développée; mais lorsque le point γ sera en n, l'élément $\gamma h'$ rencontrera IK à l'infini vers M, et donnera un point de cette développée. Ensuite, à mesure que le point γ s'approchera du point I, ce point de la développée s'approchera aussi du même point I.

D'après ce que l'on vient de voir, on doit se faire une idée claire de la forme des diverses branches de cette développée, dont chacune s'étend évidemment à l'infini.

806. Rapportons cette même développée dans l'espace. Pour cela, il faudra ployer l'arc circulaire $\alpha\beta\gamma\delta\ldots$ sur l'hélice ($abcd\ldots$, $A'b'c'd'\ldots$); chaque point γ de cet arc viendra se placer sur un point (c, c') de l'hélice, et si l'on porte la longueur γh de (c, c') en (s, s'), sur la tangente (ce, $c'e'$), le point (s, s') sera un point de la développée. En construisant donc un nombre suffisant de points, tels que (s, s'), on obtiendra cette développée.

La branche qu'il sera naturel de construire la première est la branche (ask, $A's'k'$), qui correspond à l'arc ($abc\ldots$, $A'b'c'\ldots$) de l'hélice ($abcd\ldots$, $A'b'c'd'\ldots$). Il sera convenable de construire ensuite la branche (auy, $A'y'$), qui correspond à l'arc ($af'g\ldots$, $A'f'g'$); parce que ces deux branches se réunissant au même point (a, A′) de rebroussement donneront l'idée d'une des couples de branches dont la développée se compose. Fig. 1

Connaissant la courbe ($ywask$, $y'A's'k'$), on continuera de ployer l'arc $\alpha\beta\gamma\delta\ldots$ sur l'hélice ($abcd\ldots$, $A'b'c'd'\ldots$), tant au-dessus qu'au-dessous du point (a, A′), et il est clair que tous les points de cette hélice, sur lesquels viendront se placer les points I et α, correspondans à une moitié, deux moitiés, trois moitiés, etc.. de la circonférence $\alpha\beta\gamma\delta\ldots$, seront des points de rebroussement, tels que (a, A′), d'une des couples de branches de courbes telles que ($ywask$, $y'A's'k'$), qui forment la développée (i, i') sera l'un de ces points, et les branches de développées (iul, $i'u'l'$), (itv, $i't'v'$), seront celles qui lui correspondront. Fig. 1 et Fig. 2.

Entre deux points de rebroussement successifs (a, A′), (i, i'), qui comprennent un arc ($an'i$, $A'n''i'$), égal au demi-cercle αnI, le point milieu (n', n'') correspondra au point n de αnI; et la tangente ($n'p$, $n''p'$) donnera les points extrêmes des deux branches (ask, $a's'k'$), (itv, $i't'v'$), c'est-à-dire ceux qui seront à l'infini.

807. Pour décrire exactement une branche (ask, $A's'k'$) de la développée, il sera bon de savoir construire ses tangentes, et ce qui suit va nous en donner le moyen. Imaginons que cette branche coïncide avec un fil (ksaA, $k's'$A′), dont l'extrémité (A, A′) aboutisse à l'hélice donnée : il est clair que la partie droite (aA, A′), de ce fil, sera tangente en (a, A′) à la développée (ask, $A's'k'$). Concevons que la partie (Aa, A′), de ce même fil, s'éloigne du point (A, A′) pour décrire, par la propriété des développées, l'hélice (ABCD..., A′B′C′D′...) : on sait qu'il sera tangent dans toutes ses positions à la branche de courbe (ask, $A's'k'$); ainsi, lorsque le point décrivant sera en (C, C′), la partie rectifiée du fil Fig. 1.

Pl. 65. Fig. 1. touchera cette branche de courbe en (s, s'). D'après cela, il est extrêmement facile d'obtenir les tangentes de la développée demandée; car il est évident qu'étant donné le point de contact (s, s'), il ne s'agit que de mener l'élément correspondant $(sc, s'c')$ de l'héliçoïde, et le point (C, C'), situé sur l'hélice donnée, à la même hauteur que (c, c'), est celui par lequel passe la tangente $(Cs, C's')$, au point (s, s') de la développée.

808. Supposons que le point décrivant (C, C'), du fil, soit arrivé au point (Q, Q'), situé à la même hauteur que (n, n'); il résulte de ce qu'on vient de voir que le point de contact (s, s') sera situé à la rencontre de la courbe $(ask, A's'k')$ et de la tangente $(n'p, n''p')$: or, on sait que cette rencontre a lieu à l'infini; donc la direction du fil générateur sera la ligne $(QR, Q'R')$, parallèle à $(n'p, n''p')$: et cette ligne devant toucher la branche $(ask, A's'k')$ à l'infini, elle sera l'asymptote de cette branche.

Mais le point (Q, Q') est placé de la même manière par rapport aux deux branches $(ask, A's'k')$, $(itv, i't'v')$, la première, située sur la nappe supérieure de l'héliçoïde, et la seconde sur sa nappe inférieure; donc la droite $(QR, Q'R')$ sera tout-à-la-fois l'asymptote de ces deux branches.

Quant aux asymptotes $(qr, q'r')$, $(zx, z'x')$, des branches $(ay, A'y')$, $(iul, i'u'l')$, leur construction ne présentera aucune difficulté.

809. Or, la développée demandée est actuellement bien connue, et l'on voit, 1°. qu'elle se compose de couples de branches, telles que $(ask, A's'k')$, $(ay, A'y')$, qui répondent à un même point (a, A') de l'arête de rebroussement; 2°. que la réunion des deux branches qui forment chaque couple s'opère par un point de rebroussement; 3°. que chaque couple a l'une de ses branches sur la nappe supérieure de l'héliçoïde, et l'autre branche sur la nappe inférieure; 4°. que deux couples consécutives sont rattachées l'une à l'autre, ou ce qu'on appelle *conjuguées*, par une asymptote commune; 5°. enfin, que les deux branches de courbe, auxquelles appartient une même asymptote, sont sur des nappes différentes de l'héliçoïde. Voyons maintenant comment on pourra produire l'hélice (ABCD..., A'B'C'D'...), au moyen de sa développée.

810. Le fil $(Aask, A's'k')$, en se déroulant de dessus la branche $(ask, A's'k')$, va décrire la partie (ABCDQ, A'B'C'D'Q') de l'hélice donnée. Lorsqu'il coïncidera avec l'asymptote $(QR, Q'R')$, il sera entièrement développé de dessus cette branche, et le point décrivant, situé alors en (Q, Q'), pourra être considéré comme l'extrémité du fil $(RQ, R'Q')$, ou comme l'extrémité d'un nouveau fil $(SQ, S'Q')$: en sorte que ce point (Q, Q') poursuivra sa marche sans aucune solution de continuité, si ce dernier fil s'enroule sur la branche $(vti, v't'i')$. Alors il décrira la partie $(Qfab\ldots, Q'f''a'b''\ldots)$ de l'hélice donnée; il sera bientôt tangent en (i, i') aux deux branches $(vti, v't'i')$, $(iul, i'u'l')$; et l'extrémité d'un nouveau fil, ployé sur $(iul, i'u'l')$, continuerait, en le déployant, la génération de la courbe donnée.

D'après cela, pour décrire l'hélice (ABCD..., A'B'C'D'...) au moyen de sa développée, supposée physiquement établie dans l'espace, il faut, 1°. que toutes les branches $(ask, A's'k')$, $(iul, i'u'l')$, etc., alternativement supérieures et inférieures de la couple à laquelle elles appartiennent, soient garnies d'un fil ployé sur elles et prolongé jusqu'à l'hélice donnée : c'est-à-dire jusqu'en (A, A'), pour la branche $(ask, A's'k')$; 2°. que les parties d'asymptotes $(QS, Q'S')$, qui correspondent aux autres branches, alternativement

inférieures et supérieures, coïncident avec d'autres fils, aboutissant sur l'hélice donnée en des points tels que (Q, Q'). Cela posé, un fil (*Aask*, A'*s'k'*) se déroulera et engendrera un arc d'hélice; il viendra coïncider avec une partie d'asymptote (QR, Q'R'), non garnie de fil, et s'arrêtera; le fil qui garnira l'autre partie (QS, Q'S') s'enveloppera sur la branche (*vti*, *v't'i'*), conjuguée à (*ask*, A'*s'k'*), pour décrire un nouvel arc, et lorsque son extrémité viendra coïncider avec l'extrémité du fil enroulé sur la branche suivante, ce dernier fil se mouvra en sa place; et ainsi de suite (*). Pl. 65. Fig. 1.

811. Avant de quitter la question qui vient de nous occuper, nous ferons remarquer que toutes les couples de branches de la développée demandée étant parfaitement pareilles, il suffira, pour pouvoir les obtenir toutes, de construire l'une (*yask*, *y'*A'*s'k'*), et les points de rebroussement (*i*, *i'*) des autres. Car un cylindre vertical quelconque ayant pour axe (O, O'O''), devra couper chaque couple en deux points *w* et *w'*, *t* et *u*, disposés de la même manière par rapport à (*i*, *i'*) et (*a*, A'), ce qui donnera le moyen de déduire les derniers, (*t*, *t'*) et (*u*, *u'*), des premiers *w* et *w'*.

Nous ne nous occuperons pas de l'exécution de l'épure; on se rendra aisément compte, à la seule inspection, des motifs qui ont déterminé la mise au trait de chaque ligne.

CHAPITRE IV.

Des rayons de courbure et des lignes de courbure des surfaces courbes.

812. CONCEVONS dans l'espace une surface *convexe* quelconque; considérons sur cette surface un point A; imaginons par ce point une droite AR normale à la surface, et pour fixer les idées, supposons que cette surface soit placée dans l'espace de manière que la normale AR soit verticale. Pl. 62. Fig. 5.

Si l'on prend sur cette normale un point C, la sphère qui aura ce point pour centre, et qui passera par le point A, sera tangente à la surface donnée; c'est-à-dire que ces deux surfaces auront une facette commune entre elles (145). Or, il pourra y avoir des valeurs du rayon de cette sphère, pour lesquelles la facette commune soit plus ou moins étendue. Si la surface donnée était sphérique, par exemple, il est clair que la sphère variable

(*) La développée d'une sinusoïde présente des résultats analogues à ceux que nous venons d'indiquer.

Pl. 62. Fig. 5. aurait avec elle une petite surface d'attouchement, d'autant plus considérable que les rayons des deux sphères approcheraient plus de se confondre.

813. Pour parvenir à connaître les surfaces sphériques qui ont en A, avec la surface donnée, la conformité de courbure la plus grande, ne nous occupons que de la calotte infiniment petite M*m*N*n* qui environne le point A, et imaginons par la normale AR une infinité de plans. Ces plans couperont la calotte M*m*N*n* suivant des arcs infiniment petits, tels que MAN; tous ces arcs auront leurs rayons de courbure sur la normale AR, et ces rayons, en général de grandeurs différentes, seront compris entre deux d'entre eux, l'un AR plus grand que tous les autres, et correspondant à un petit arc MAN; l'autre A*r* plus petit que tous les autres, et correspondant à un petit arc *m*A*n*.

Concevons que le rayon de la sphère variable prenne toutes les valeurs possibles, depuis zéro jusqu'à l'infini, ou, ce qui revient au même, concevons que le centre C, de cette sphère, se meuve sur la droite indéfinie AR, à partir du point A. On voit que jusqu'à ce que le point C soit parvenu en *r*, à l'extrémité du rayon A*r* de l'arc *m*A*n* de plus grande courbure, le contact de la sphère et de la surface donnée sera de plus en plus intime, et qu'aussitôt que ce même point C aura dépassé l'extrémité R du rayon AR, de l'arc MAN de moindre courbure, le contact sera de moins en moins intime.

Quant aux sphères dont les rayons seront compris entre A*r* et AR, il est facile de prouver qu'elles auront, avec la surface donnée, un attouchement moins considérable que celui des sphères A*r* et AR. Soit *v*A*t* un petit arc d'une des sections faites par les plans menés par AR : cet arc et son cercle osculateur se confondront de *v* en *t*, et le rayon de ce cercle sera une droite AC, moindre que AR et plus grande que A*r*. Cela posé, imaginons que ce cercle tourne autour de AR; il va engendrer une sphère dont le centre sera en C, et le rayon AC étant compris entre AR et A*r*, l'arc générateur *v*A passera nécessairement dans son mouvement, au-dessous de AM et au-dessus de A*m*; d'où il faut conclure que l'arc *v*A, commun à la sphère engendrée et à la surface donnée, est un arc d'intersection.

Fig. 6. En effet, prenons sur cet arc un point quelconque x, et imaginons que sans s'éloigner ni se rapprocher de la normale en A, il se meuve, premièrement sur la sphère; secondement sur la calotte donnée. Dans le premier mouvement, il va décrire un cercle horizontal BxD, qui sera la base d'un

cylindre vertical GHIK, contenant la courbe ExF, décrite dans le second mouvement, et cette courbe aura sa partie xF au-dessous de BxD, et sa partie xE au-dessus. Or, si l'arc vxA était un arc de contact, les deux lignes BxD, ExF, seraient tangentes entre elles, ainsi, cette dernière aurait en x un point d'inflexion où la tangente serait l'horizontale Tx, tangente au cercle BxD ; et le plan tangent à la calotte donnée passerait par l'horizontale Tx et par la ligne ux, tangente en x à vxA, laquelle perce au même point x le cylindre GHIK. Supposons que la partie de ce cylindre représentée sur la figure soit infiniment étroite dans le sens GH; son intersection avec le plan tangent mené par Tx et ux sera l'élément de contact des lignes Tx et BxD; donc, si l'arc vxA était un arc de contact, ce plan laisserait, sur la courbe ExF, des points de la surface donnée au-dessus de lui, et d'autres au-dessous, ce qui n'est point admissible, puisque cette surface est une surface convexe; donc, etc. Pl. 62. Fig. 6

Il en est de l'arc At comme de l'arc vxA, et il en est tout autrement des arcs MAN, mAn; car ces derniers sont évidemment des arcs de contact des sphères respectives AR et Ar avec la calotte MmNn. Fig. 5.

814. Il est clair, d'après cela, que les sphères qui ont pour rayons de courbure les rayons AR, Ar, des arcs MAN, mAn, de moindre et de plus grande courbure de la surface donnée, sont celles qui la touchent le plus intimement. Et comme ces sphères sont aux surfaces, ce que les cercles osculateurs sont aux courbes (97), on les nomme des *sphères osculatrices* (*).

815. Si la surface donnée, au lieu d'être convexe en A, comme nous l'avons supposé, était *non convexe*, ou conformée comme la gorge d'une poulie, l'un des arcs analogues à MAN, mAn, ne serait plus, à proprement parler, celui de moindre courbure.

Pour prouver cette vérité, remarquons d'abord que ce qui caractérise ces arcs MAN, mAn, dans une surface convexe, c'est qu'ils ont des cour-

---

(*) De même que le cercle osculateur se trouve, d'un côté de la développante, au dehors de cette développante, et de l'autre côté, au dedans, de même aussi la sphère osculatrice, qu'on peut considérer comme engendrée par le cercle osculateur en mouvement autour de la normale, touche la surface donnée extérieurement d'un côté du point A, et intérieurement de l'autre côté. Il suit de là que les sphères osculatrices touchent la calotte MmNn suivant les arcs respectifs MAN, mAn, et qu'ils la coupent suivant d'autres courbes qui passent par le point A.

Pl. 62. Fig. 5 bures entre lesquelles sont comprises celles des autres sections : car c'est de là que résulte leur propriété d'être des arcs d'attouchement entre la surface donnée et les sphères osculatrices.

Fig. 7. Remarquons ensuite que les arcs qui jouissent de la même propriété sur une surface non convexe en A, et qui en conséquence sont analogues à MAN et *m*A*n* de la figure 5, présentent nécessairement des courbures situées en sens contraires, et dont les rayons AR, A*r*, sont placés par rapport à la surface donnée, l'un d'un côté de cette surface, et l'autre du côté opposé.

Or, l'un de ces arcs, comme nous venons de le dire, n'est plus celui de moindre courbure; en effet, si l'on imagine que le plan normal tourne autour de AC, il est clair qu'à mesure qu'il s'éloignera de la position *m*A*n* ou MAN, la courbure de cet arc diminuera jusqu'à ce qu'elle change de côté; et comme il faudra qu'elle passe par zéro, pour que ce changement s'opère, il s'ensuit qu'il y a entre *m*A et MA, d'une part, *m*A et NA, d'autre part, deux sections normales de courbure nulle, et dont les rayons de courbure sont conséquemment infinis (98).

Toutefois les courbures nulles ne seront pas des limites des autres courbures, car les rayons de ces courbures nulles étant tout aussi bien situés d'un côté de la surface que de l'autre, elles seront le passage des courbures situées d'un côté de cette surface à celles situées de l'autre côté.

D'après cela, en sous-entendant que les arcs MAN, *m*A*n*, sont des arcs dont les courbures *limitent* les autres courbures des sections normales, MAN étant celui qui a la moindre courbure dans un sens, et *m*A*n* celui qui a la moindre courbure dans l'autre sens, de plus, MAN ayant un rayon plus grand que celui de *m*A*n*, nous continuerons d'appeler MAN l'*arc de moindre courbure*, et *m*A*n* *celui de plus grande courbure*.

Cela posé, il arrivera, comme dans le cas d'une surface convexe, que le cercle osculateur d'une section normale quelconque *vx*A, passera, en tournant sur AC, au-dessus de l'un des arcs MA, *m*A, et au-dessous de l'autre. Et pour que l'arc *vx*A fût un arc de contact, il faudrait aussi, comme dans le cas précédent, que la tangente au cercle horizontal décrit par un point quelconque x de *vx*A, touchât l'intersection de la surface donnée et d'un cylindre droit vertical ayant ce cercle pour base : or, cette section cylindrique aurait déjà une tangente horizontale sur A*m*, une autre sur AM, et pour qu'elle en eût encore une, entre AM et A*n*, il faudrait qu'elle eût entre les sections de moindre et de plus grande courbure trois points

d'inflexion, ce qui évidemment ne peut avoir lieu pour un point quelconque A d'une surface.

816. Nous poserons donc en principe, *qu'une surface quelconque a pour chacun de ses points deux sphères osculatrices, dont les rayons respectifs sont les rayons de courbure* AR, Ar, *des sections normales* MAN, mAn, *de moindre et de plus grande courbure.* Pl. 62. Fig. 5 et Fig. 7.

817. L'arc mAn étant un arc de contact de la surface donnée, quelle qu'elle soit, et de la sphère osculatrice Ar, la normale en m à l'une de ces surfaces est aussi normale à l'autre : et comme les normales d'une sphère passent toutes par son centre, il en résulte que la normale en m à la surface donnée est la droite mr, menée par le point m et par le centre r de la plus grande courbure. On peut démontrer de même que la normale en M est la droite MR, qui passe par le point M et par le centre R de la plus petite courbure. Donc les arcs MAN, mAn, de moindre et de plus grande courbure, sont tels que si l'on s'écarte infiniment peu du point A, en suivant leurs directions, les normales MR, mr, des points auxquels on parviendra, rencontreront la normale AC du point de départ.

818. Si l'on s'écarte du point A suivant toute autre direction différente de MAN et mAn, la normale à la surface donnée au point quelconque x, auquel on arrivera, ne rencontrera pas AC. En effet, menons par le point x et par la normale AC un plan; il coupera la calotte MmNn suivant une petite ligne vxAt, qui sera l'*intersection* (813 et 815) de la surface donnée et de la sphère qui a pour rayon le rayon de courbure AC de vxAt : d'où nous conclurons d'abord que les normales en x, à la surface donnée et à la sphère AC, sont des droites différentes. Par le point x, concevons un plan normal à la courbe vxAt; il contiendra tout-à-la-fois ces deux normales. Mais celle de la sphère sera la droite qui joindra le point x et le point où le plan normal sera percé par AR, c'est-à-dire le point C : or, ce plan normal ne contiendra aucune autre droite, menée par le point x, qui puisse rencontrer AR; donc la normale en x à la surface donnée ne peut rencontrer AR.

819. D'après cela, les arcs mAn, MAN, de plus grande et de moindre courbure, ont pour propriété caractéristique, que les normales à la calotte MmNn, en des points de ces arcs infiniment peu éloignés du point A, rencontrent la normale AR. Il est facile de déduire de là que ces arcs se coupent à angle droit.

Pl. 62. Fig. 8. 820. Supposons d'abord que la surface donnée soit une surface cylindrique quelconque, et soit ABCDFE une portion de cette surface et L un de ses points. De toutes les sections qu'un plan mené par la normale LP peut faire sur ce cylindre, celle dont le rayon de courbure en L est le plus grand est nécessairement l'élément BLF ; car le rayon de courbure de cet élément est celui d'une ligne droite. Cela posé, menons par la normale LP un plan JLK, perpendiculaire au plan mené par LP et BLF; ce plan coupera la surface cylindrique donnée suivant une courbe JLK : or, il est clair que cette courbe s'éloignera plus rapidement du plan tangent en L, que toute autre située sur le cylindre; donc elle est de toutes les sections faites par des plans menés par LP, celle dont le rayon de courbure en L est un *minimum*.

On voit donc que sur un cylindre, les arcs LM, LN, de plus grande et de moindre courbure, sont rectangulaires entre eux. Il est d'ailleurs bièn clair qu'en s'éloignant infiniment peu du point L, suivant ces arcs, les normales MQ, NP, des points M et N auxquels on arrive, rencontrent la normale LP : car les droites LP, MQ, normales suivant les points d'un même élément BLF, sont parallèles et se coupent à l'infini; et les droites LP, NP, normales suivant la section JLK d'un plan perpendiculaire aux élémens du cylindre, sont dans ce plan et conséquemment se rencontrent.

Il est pareillement fort aisé de voir que si l'on s'éloigne du point L suivant une direction LO, différente de LM et LN, la normale au point O, infiniment rapproché du point L, ne coupera pas LP. En effet, menons par le point O, le plan *jOk* perpendiculaire à BLF; ce plan contiendra la normale OR, et il sera parallèle au plan JLK qui contient LP : mais pour que les droites LP et OR, situées dans deux plans parallèles, pussent se rencontrer, il faudrait qu'elles fussent elles-mêmes parallèles; or, le cylindre n'a, près du point L, de normales parallèles à LP que suivant les points de l'élément BLF, et le point O, par hypothèse, n'est pas sur cet élément : donc, etc.

821. Ceci étant bien entendu, démontrons généralement la propriété qui nous occupe.

Pl. 63. Fig. 1. Soit A un point d'une surface quelconque, et MAN l'arc infiniment petit de plus grande ou de moindre courbure, de moindre courbure par exemple, correspondant à ce point. Concevons, premièrement, par la normale AR, et par la tangente en A, à l'arc MAN, un plan; ce plan coupera

la sphère osculatrice AR suivant un cercle auquel appartiendra l'arc infiniment petit MAN. Secondement, concevons par le point A, un plan tangent à la surface donnée, et menons par ce point, et dans ce plan tangent, une droite AB, à angle droit sur MAN; puis menons une suite de plans parallèles au plan de la droite AB et de la normale AR. Ces plans couperont la petite zone commune à la surface osculatrice AR, et à la surface donnée, suivant les arcs infiniment petits M'M*m*, A'A*a*, N'N*n*, etc., communs à cette surface et à la sphère. Or, les tangentes MC, AB, ND, etc., menées par tous les points de l'arc MAN, aux arcs M'M*m*, A'A*a*, N'N*n*, etc., considérés comme appartenant à la sphère, formeront une petite portion MANDBC de cylindre, dont les lignes de moindre et de plus grande courbure en L seront AB et MAN (820). Si donc on prend sur ces lignes deux points P et M, infiniment rapprochés du point A, les normales MR et PS du cylindre, correspondantes à ces points, rencontreront AR. Pl 63. Fig. 1.

Cela posé, imaginons que le point A se meuve sur la surface donnée, dans le sens de la tangente AB, c'est-à-dire perpendiculairement à MAN, d'une quantité infiniment petite A*a*; et concevons que les choses qui existaient en A, glissent en *a*, en se modifiant graduellement selon la nature de cette surface. La courbe de contact MAN du cylindre et de la surface donnée prendra une position *man*, infiniment peu différente, de forme et de situation, de la courbe MAN; la portion de cylindre MANDBC variera aussi infiniment peu, et puisque l'arc A*a* est infiniment petit, la droite AR, normale tout-à-la-fois à la surface courbe et au cylindre, ne quittera pas le plan BAR : donc la position *ar*, à laquelle elle s'arrêtera, rencontrera la normale AR. Donc l'arc infiniment petit A*a*, perpendiculaire à MAN, sera l'arc de plus grande courbure de la surface donnée ; donc enfin les arcs infiniment petits MAN, A'A*a*, de moindre et de plus grande courbure, se coupent à angle droit.

822. Supposons maintenant qu'il s'agisse de mesurer la courbure d'une surface en un de ses points. Il faudra d'abord convenir du sens rigoureux qu'il convient d'attacher à l'expression de *courbure d'une surface* : or, quelle que soit la convention qu'on adopte, une surface sphérique présentera dans tous ses points la même courbure, et cette courbure diminuera à mesure que le rayon de la sphère augmentera. Posons donc en principe, *que les courbures des sphères sont en raison inverse de leurs rayons* : nous pourrons alors nous entendre sur les différens degrés de courbure des surfaces sphériques.

Bien plus, le sens du mot *courbure* étant rigoureusement fixé pour les sphères, il se trouvera fixé aussi pour toutes les surfaces possibles; car il résulte de ce qui précède, que si l'on considère une surface quelconque comme composée d'une infinité de facettes infiniment petites, les sphères osculatrices en un point de cette surface passeront chacune par deux facettes consécutives; seront les seules qui jouissent de cette propriété, et présenteront les mêmes courbures que présente la surface dans le sens des facettes communes. D'où il suit *que les courbures d'une surface sont en raison inverse des rayons des sphères osculatrices.*

823. Il suit de là qu'en général une surface quelconque n'a, dans chacun de ses points, que deux courbures; que chacune de ces courbures a son centre particulier, son rayon particulier, et que les deux arcs sur lesquels se prennent ces deux courbures, sont à angles droits sur la surface.

Les cas particuliers pour lesquels, comme dans la sphère et dans les sommets de surfaces de révolution, deux normales consécutives se rencontrent, ne sont pas une exception à cette proposition : ces cas sont des cas singuliers dans lesquels les deux courbures sont égales entre elles, en sorte que les directions suivant lesquelles on doit les mesurer se trouvent indifférentes.

Pl. 63. Fig. 2. 824. Passons à quelques conséquences qui suivent des deux courbures d'une surface courbe, et qu'il est important de faire connaître aux artistes.

« Soit LPP″L′ une portion de surface courbe quelconque, sur laquelle nous considérions un point L choisi arbitrairement, et soit conçue la normale à la surface en L. Nous venons de voir que l'on peut passer, suivant deux directions différentes, du point L à un autre M ou L′, pour lequel la nouvelle normale rencontre la première, et que ces deux directions sont à angle droit sur la surface. Soient donc LM et LL′ ces deux directions rectangulaires en L. Du point M, on pourra de même passer dans deux directions différentes à un autre point N ou M′, pour lequel la normale rencontre la normale en M; et soient MN et MM′ ces deux directions, rectangulaires en M. En opérant de même pour le point N, on trouvera les deux directions NO et NN′ rectangulaires en N; pour le point O, l'on trouvera les deux directions OP, OO′, et ainsi de suite. La série des points L, M, N, O, P, etc., pour lesquels deux normales consécutives sont toujours dans un plan, formera sur la surface courbe une ligne courbe, qui indiquera perpétuellement le sens d'une des deux courbures de la surface, et cette courbe sera une ligne de première courbure, qui passera par

le point L. Si l'on opère pour le point L', comme on l'a fait pour le point L, Pl. 63. Fig. 2.
on pourra d'abord passer, suivant deux directions rectangulaires, à un nouveau point M' ou L'', pour lequel la nouvelle normale rencontre la normale en L', et l'on trouvera de même une nouvelle série de points L', M', N', O', P', etc., qui formeront sur la surface courbe une autre ligne de première courbure, qui passera par le point L'. En opérant de même pour la suite des points L'', L''', L''''... trouvés comme L', L'', on aura de nouvelles lignes de première courbure $L'M'N''O'P''$..., $L'''M'''N'''O'''P'''$..., etc., qui passeront par les points respectifs L'', L''', L'''', etc., et qui diviseront la surface courbe en zones. Mais la suite des points L, L', L'', L'''..., pour lesquels deux normales consécutives sont encore dans un plan, formera sur la surface courbe une autre courbe qui indiquera perpétuellement le sens de l'autre courbure de la surface, et cette courbe sera la ligne de seconde courbure; M, M', M'', M''', etc., formeront une autre ligne de seconde courbure, qui passera par le point M; la série des points N, N', N'', N'''..., formera une nouvelle ligne de seconde courbure qui passera par le point N, et ainsi de suite, et toutes les lignes de seconde courbure diviseront la surface courbe en d'autres zones.

825. » Enfin, toutes les lignes de première courbure couperont à angles droits toutes les lignes de seconde courbure, et ces deux systèmes de lignes courbes diviseront la surface en élémens rectangulaires; et cet effet aura lieu, non-seulement si ces lignes sont infiniment proches, comme nous l'avons supposé, mais même quand celles d'un même système seraient à des distances finies les unes des autres. Avant que d'aller plus loin, nous allons en apporter un exemple, avec lequel on est déjà familiarisé.

826. » Si l'on coupe une surface quelconque de révolution par une suite de plans menés par l'axe, on aura une suite de sections qui seront les lignes d'une des courbures de la surface; car pour qu'une courbe soit ligne de courbure d'une surface, il faut qu'en chacun de ses points, l'élément de surface cylindrique qui toucherait la surface dans l'élément de la courbe, ait sa droite génératrice perpendiculaire à la courbe; or, cette condition a évidemment lieu ici, non-seulement en chaque point de la courbe pour un élément de surface cylindrique particulière, ce qui serait suffisant, mais même par rapport à toute la courbe pour une même surface cylindrique. De plus, si l'on coupe la même surface de révolution par une suite de plans perpendiculaires à l'axe, on aura une seconde

suite de sections, qui seront toutes circulaires, et qui seront les lignes de l'autre courbure ; car si par un point quelconque d'une de ces sections, on conçoit la tangente au méridien de la surface, et si l'on suppose que cette tangente se meuve parallèlement à elle-même pour engendrer l'élément d'une surface cylindrique, tangent à la surface de révolution, l'élément de la surface cylindrique touchera cette surface dans l'arc de cercle, et cet arc sera perpendiculaire à la droite génératrice. Ainsi, pour une surface quelconque de révolution, les lignes de courbure sont, pour une espèce de courbure, les méridiens de la surface, et pour l'autre courbure, les parallèles; et il est évident que ces deux suites de courbes se coupent toutes à angles droits sur la surface.

Pl. 63. Fig. 2. 827. » Si par tous les points d'une des lignes de courbure LMNOP d'une surface courbe, on conçoit des normales à la surface, nous avons vu que la seconde normale rencontrera la première en un certain point, que la troisième rencontrera la seconde en un autre point, et ainsi de suite; le système de ces normales, dont deux consécutives sont toujours dans un même plan, forme donc une surface développable, qui est partout perpendiculaire à la surface courbe, et qui la coupe suivant la ligne de courbure. Cette ligne de courbure étant elle-même partout perpendiculaire aux normales qui composent la surface développable, est aussi une ligne de courbure de cette dernière surface. L'arête de rebroussement de la surface développable, arête qui est formée par la suite des points de rencontre des normales consécutives, et à laquelle toutes les normales sont tangentes, est une des développées de la courbe LMNOP; elle est le lieu des centres de courbure de tous les points de cette courbe, et elle est aussi celui des centres d'une des courbures de la surface pour les points qui sont sur la ligne LMNOP. Si l'on fait la même observation pour toutes les autres lignes de courbure de la même suite, telles que L'M'N'O'P', L''M''N''O''P'', etc., toutes les normales de la surface courbe pourront être regardées comme composant une suite de surfaces développables, toutes perpendiculaires à la surface, et le système des arêtes de rebroussement de toutes ces surfaces développables, formera une surface courbe qui sera le lieu de tous les centres d'une des courbures de la surface courbe.

» Ce que nous venons de remarquer pour une des deux courbures de la surface, a également lieu pour l'autre. En effet, si par tous les points L, L', L'', L''', etc., d'une des lignes de l'autre courbure, on conçoit des normales

à la surface, ces droites seront consécutivement deux à deux dans un même plan; leur système formera une surface développable, qui sera partout perpendiculaire à la surface proposée, et qui la rencontrera dans la ligne de courbure LL'L''L'''..., qui sera elle-même une ligne de courbure de la surface développable. L'arête de rebroussement de cette dernière surface sera le lieu des centres de courbure de la ligne LL'L''L'''..., et en même temps celui des centres de seconde courbure de la surface courbe, pour tous les points de la ligne LL'L''L'''... Il en sera de même pour toutes les normales menées par les points des autres lignes de courbure MM'M''M'''..., NN'N''N'''..., etc. En sorte que toutes les normales de la surface courbe pourront être regardées de nouveau comme composant une seconde suite de surfaces développables, toutes perpendiculaires à la surface, et le système des arêtes de rebroussement de toutes ces nouvelles surfaces développables, formera une seconde surface courbe, qui sera le lieu des centres de la seconde courbure de la surface. Pl. 63. Fig. 2.

828. » On voit donc que toutes les normales d'une surface courbe peuvent être considérées comme les intersections de deux suites de surfaces développables, telles que chacune des surfaces développables rencontre la surface courbe perpendiculairement, et la coupe suivant une courbe, qui est en même temps ligne de courbure de la surface courbe et ligne de courbure de la surface développable, et que chacune des surfaces développables de la première suite, coupe toutes celles de la seconde suite en ligne droite et à angles droits. »

829. Dans quelques cas particuliers, les surfaces des centres des deux courbures d'une même surface courbe sont distinctes et peuvent être engendrées séparément. « On en a un exemple dans les surfaces de révolution, pour lesquelles une de ces surfaces se réduit à l'axe même de rotation, et pour lesquelles l'autre est une autre surface de révolution engendrée par la rotation de la développée plane du méridien autour du même axe. » Mais le plus souvent, et dans le cas général, ces deux surfaces ne sont autre chose que les deux nappes d'une même surface.

830. » De ce que chaque normale est tangente en même temps aux arêtes de rebroussement des deux surfaces développables normales dont elle est l'intersection, il s'ensuit qu'elle est en même temps tangente aux deux nappes de la surface des centres de courbure; de plus, chacune de ces nappes est l'enveloppe de toutes les surfaces développables normales d'une même suite; ainsi, tout plan tangent à une de ses surfaces développables, sera aussi tangent à la nappe que cette surface touche; donc, si l'on conçoit par la même normale les deux plans tangens aux surfaces développables dont elle est l'intersection, ces deux plans, qui d'ailleurs sont à angles droits, seront tangens, l'un à la première nappe de la surface des centres, et l'autre à la seconde. Donc la surface des centres de

courbure, d'une surface donnée quelconque, jouit de cette propriété remarquable, que les plans tangens à ses deux nappes, menés par un point de la surface donnée, se coupent à angles droits (*). »

Il suit de là que toute surface courbe n'est pas propre à être le lieu unique des centres de courbure d'une autre surface, et que, pour qu'elle y soit propre, il faut, 1°. qu'elle ait deux nappes; 2°. que ces nappes jouissent de la propriété que l'on vient d'énoncer. Toutes celles qui ne satisfont pas à ces deux conditions ne peuvent former que la surface des centres d'une des courbures, et le lieu des centres de l'autre courbure est alors une seconde surface, conjuguée à la première, de telle sorte que leur système jouisse de cette propriété.

831. Lorsqu'une surface est partout convexe, les surfaces des centres sont situées d'un même côté par rapport à chacun de ses points. Dans le cas contraire, c'est-à-dire lorsque la surface n'est convexe en aucun point, comme s'il s'agit d'un hyperboloïde à une nappe, les surfaces des centres sont situées de côtés opposés, par rapport à chaque point de la surface. Mais il arrive souvent qu'une surface est convexe en de certaines parties, et ne l'est pas en d'autres; alors les surfaces des centres changent de côté. Considérons, par exemple, une surface annulaire produite par le mouvement d'une sphère assujettie à tourner autour d'une droite : l'hémisphère tourné vers cette droite va décrire une partie qui aura ses rayons de courbure situés dans des sens contraires, et la partie que décrira l'hémisphère opposé sera convexe, et aura ses rayons de courbure situés d'un même côté de l'enveloppe (301).

832. Les deux rayons de courbure étant situés dans le même sens, il peut encore arriver qu'ils soient égaux; alors les surfaces des centres se coupent, et leur intersection est le lieu des centres des courbures sphériques de la surface. Les tangentes à cette intersection sont normales à la surface suivant une ligne remarquable, qui est celle où les courbures de cette surface sont égales, et que l'on désigne à cause de cela sous le nom de *ligne des courbures sphériques*. Il est clair que cette ligne coupe toutes les lignes de courbure de l'une et de l'autre espèce.

833. « Voyons actuellement quelques exemples de l'utilité dont ces généralités peuvent être dans certains arts. Le premier exemple sera pris dans l'Architecture.

» Les voûtes construites en pierres de taille sont composées de pièces distinctes, auxquelles on donne le nom générique de *voussoirs*. Chaque voussoir a plusieurs faces qui exigent la plus grande attention dans l'exécution; 1°. la face qui doit faire parement, et qui, devant être une partie de la surface visible de la voûte, doit être exécutée avec la plus grande précision : cette face se nomme *douelle;* 2°. les faces par lesquelles les voussoirs consécutifs s'appliquent les uns contre les autres, on les nomme généralement *joints*. Les joints exigent aussi la plus grande exactitude dans leur exécution; car la pression se transmettant d'un voussoir à l'autre, perpendiculairement à la surface du joint, il est nécessaire que les deux pierres se touchent par le plus grand nombre possible de points, afin que pour chaque point de contact, la pression soit la moindre, et que pour tous elle

(*) Ceux qui connaissent la perspective verront par cette propriété que, d'un point de vue quelconque, situé dans la direction de la surface donnée et de la surface des centres, les contours apparens des deux nappes de cette dernière surface paraissent toujours se couper à angles droits.

approche le plus de l'égalité. Il faut donc que dans chaque voussoir, les joints approchent le plus de la véritable surface dont ils doivent faire partie; et pour que cet objet soit plus facile à remplir, il faut que la surface des joints soit de la nature la plus simple et de l'exécution la plus susceptible de précision. C'est pour cela que l'on fait ordinairement les joints plans; mais les surfaces de toutes les voûtes ne comportent pas cette disposition, et dans quelques-unes on blesserait trop les convenances dont nous parlerons dans un moment, si l'on ne donnait pas aux joints une surface courbe. Dans ce cas, il faut choisir parmi toutes les surfaces courbes qui pourraient d'ailleurs satisfaire aux autres conditions, celles dont la génération est la plus simple, et dont l'exécution est plus susceptible d'exactitude. Or, de toutes les surfaces courbes, celles qu'il est plus facile d'exécuter, sont celles qui sont engendrées par le mouvement d'une ligne droite, et surtout les surfaces développables; ainsi, lorsqu'il est nécessaire que les joints des voussoirs soient des surfacescourbes, on les compose, autant qu'il est possible, de surfaces développables.

» Une des principales conditions auxquelles la forme des joints des voussoirs doit satisfaire, c'est d'être partout perpendiculaires à la surface de la voûte que ces voussoirs composent. Car, si les deux angles qu'un même joint fait avec la surface de la voûte étaient sensiblement inégaux, celui de ces angles qui excéderait l'angle droit, serait capable d'une plus grande résistance que l'autre; et dans l'action que deux voussoirs consécutifs exercent l'un sur l'autre, l'angle plus petit que l'angle droit, serait exposé à éclater, ce qui, au moins, déformerait la voûte, et pourrait même altérer sa solidité, et diminuer la durée de l'édifice. Lors donc que la surface d'un joint doit être courbe, il convient de l'engendrer par une droite qui soit partout perpendiculaire à la surface de la voûte; et si l'on veut de plus que la surface du joint soit développable, il faut que toutes les normales à la surface de la voûte, et qui composent, pour ainsi dire, le joint, soient consécutivement deux à deux dans un même plan. Or, nous venons de voir que cette condition ne peut être remplie, à moins que toutes les normales ne passent par une même ligne de courbure de la surface de la voûte; donc, si les surfaces des joints des voussoirs d'une voûte doivent être développables, il faut nécessairement que ces surfaces rencontrent celles de la voûte dans ses lignes de courbure.

» D'ailleurs, avec quelque précision que les voussoirs d'une voûte soient exécutés, leur division est toujours apparente sur la surface; elle y trace des lignes très sensibles, et ces lignes doivent être soumises à des lois générales, et satisfaire à des convenances particulières, selon la nature de la surface de la voûte. Parmi les lois générales, les unes sont relatives à la stabilité, les autres à la durée de l'édifice; de ce nombre est la règle qui prescrit que les joints d'un même voussoir soient rectangulaires entre eux, par la même raison qu'ils doivent être eux-mêmes perpendiculaires à la surface de la voûte. Aussi les lignes de division des voussoirs doivent être telles que celles qui divisent la voûte en assises, soient toutes perpendiculaires à celles qui divisent une même assise en voussoirs. Quant aux convenances particulières, il y en a de plusieurs sortes, et notre objet n'est pas ici d'en faire l'énumération; mais il y en a une principale, c'est que les lignes de division des voussoirs qui, comme nous venons de le voir, sont de deux espèces, et qui doivent se rencontrer perpendiculairement, doivent aussi porter le caractère de la surface à laquelle elles appartiennent. Or, il n'existe pas d'autres lignes sur la surface courbe, qui

puissent remplir en même temps toutes ces conditions, que les deux suites de lignes de courbures, et elles les remplissent complètement. Ainsi, la division d'une voûte en voussoirs doit donc toujours être faite par des lignes de courbure de la surface de la voûte, et les joints doivent être des portions de surfaces développables formées par la suite des normales à la surface, qui, considérées consécutivement, sont deux à deux dans un même plan ; en sorte que pour chaque voussoir, les surfaces des quatre joints et celle de la voûte soient toutes rectangulaires.

» Avant la découverte des considérations géométriques sur lesquelles tout ce que nous venons de dire est fondé, les artistes avaient un sentiment confus des lois auxquelles elles conduisent, et, dans tous les cas, ils avaient coutume de s'y conformer. Ainsi, par exemple, lorsque la surface de la voûte était de révolution, soit qu'elle fût en sphéroïde, soit qu'elle fût en berceau tournant, ils divisaient ses voussoirs par des méridiens et par des parallèles, c'est-à-dire par les lignes de courbure de la surface de la voûte.

» Les joints qui correspondaient aux méridiens étaient des plans menés par l'axe de révolution; ceux qui correspondaient aux parallèles, étaient des surfaces coniques de révolution autour du même axe; et ces deux espèces de joints étaient rectangulaires entre eux, et perpendiculaires à la surface de la voûte. Mais, lorsque les surfaces des voûtes n'avaient pas une génération aussi simple, et quand leurs lignes de courbure ne se présentaient pas d'une manière aussi marquée, comme dans les voûtes en sphéroïdes alongés, et dans un grand nombre d'autres, les artistes ne pouvaient plus satisfaire à toutes les convenances, et ils sacrifiaient, dans chaque cas particulier, celles qui leur présentaient les difficultés les plus grandes.

» Il serait donc convenable que, dans chacune des écoles de Géométrie descriptive, établies dans les districts (*), le professeur s'occupât de la détermination et de la construction des lignes de courbure des surfaces employées ordinairement dans les arts, afin que, dans le besoin, les artistes qui ne peuvent pas consacrer beaucoup de temps à de semblables recherches, pussent le consulter avec fruit, et profiter de ses résultats.

834. » Le second exemple que nous rapporterons sera pris dans l'art de la gravure. Dans la gravure, les teintes des différentes parties de la surface des objets représentés sont exprimées par des hachures que l'on fait d'autant plus fortes ou d'autant plus rapprochées, que la teinte doit être plus obscure.

» Lorsque la distance à laquelle la gravure doit être vue est assez grande pour que les traits individuels de la hachure ne soient pas aperçus, le genre de la hachure est à peu près indifférent; et quel que soit le contour de ses traits, l'artiste peut toujours les forcer et les multiplier de manière à obtenir la teinte qu'il désire, et à produire l'effet demandé. Mais, et c'est le cas le plus ordinaire, quand la gravure est destinée à être vue d'assez près pour que les contours des traits de la hachure soient aperçus, la forme de ces contours n'est plus indifférente. Pour chaque objet et pour chaque partie de la surface d'un objet, il y a des contours de hachures plus propres que tous les autres à

(*) *Voyez* la note du n° suivant.

donner une idée de la courbure de la surface ; ces contours particuliers sont toujours au nombre de deux, et quelquefois les graveurs les emploient tous deux à la fois, lorsque, pour forcer plus facilement leurs teintes, ils croisent les hachures. Ces contours, dont les artistes n'ont encore qu'un sentiment confus, sont les projections des lignes de courbure de la surface qu'ils veulent exprimer. Comme les surfaces de la plupart des objets ne sont pas susceptibles de définition rigoureuse, leurs lignes de courbure ne sont pas de nature à être déterminées ni par le calcul, ni par des constructions graphiques. Mais si, dans leur jeune âge, les artistes avaient été exercés à rechercher les lignes de courbure d'un grand nombre de surfaces différentes, et susceptibles de définitions exactes, ils seraient plus sensibles à la forme de ces lignes et à leur position, même pour les objets moins déterminés; ils les saisiraient avec plus de précision, et leurs ouvrages auraient plus d'expression.

» Nous n'insisterons pas sur cet objet, qui ne présente peut-être que le moindre des avantages que les arts et l'industrie retireraient de l'établissement d'une école de Géométrie descriptive, dans chacun des districts de la République (*) »

Occupons-nous maintenant des constructions relatives aux rayons de courbure des surfaces.

835. Soit d'abord A le point de contact d'un plan tangent à une surface convexe quelconque, et supposons que ce plan coïncide avec celui de la figure; il sera possible de trouver non-seulement le rayon de courbure de la surface en ce point, mais encore les directions des lignes de courbure de cette surface en ce même point. Pl. 63. Fig. 3.

Pour cela, on menera par le point A une suite de plans $d'Ae'$, $d''Ae''$, $d'''Ae'''$..., normaux à la surface donnée; on construira les intersections de ces plans et de ces surfaces; on déterminera, par le procédé du n° 778, les rayons de courbure ρ', ρ'', ρ''', etc., de ces sections, et, ayant porté chaque rayon ρ' de A en d', et de A en e', sur la trace $d'e'$ du plan normal correspondant, on décrira la courbe $d'd''d'''...e'e''e'''$..., que donneront les points d', d'', d'''..., e', e'', e'''..., etc.

Or, les rayons de courbure cherchés étant évidemment les distances MA=AN, mA=An, qui, par rapport à leurs voisines, sont des *maximum* et des *minimum*, on rectifiera, pour les obtenir, la ligne $d'd''d'''...e'e''e'''$..., sur une droite D'X; par les points D', D'', D'''... E', E'', E'''..., correspondans à d', d'', d'''..., e', e'', e'''..., on élevera des perpendiculaires D'A', D''A'', D'''A'''..., E'a', E''a'', E'''a'''..., sur chacune desquelles on portera, à partir de D'X, les rayons de courbure Ad' = Ae', Ad'' = Ae'', etc., de D' en A', de D'' en A'', etc.: cela fait, on décrira la ligne A'A''A'''... $a'a''a'''$; on menera, par le procédé exposé n° 122 (**), des tangentes pq, tu, à cette ligne; on abaissera par leurs points de contact R et r, R' et r', les perpendiculaires RS=R'S', rs=$r's'$, qui seront les rayons de courbure demandés.

Si la surface donnée était une surface non convexe, la courbe $d'd''d'''$... $e'e''e'''$... aurait la forme indiquée fig. 4, dans laquelle les branches caMdb, $efngi$, khNpq, $lomrs$, Fig. 4.

(*) Ce qui précède est extrait de la Géométrie descriptive de l'illustre Monge; elle fut publiée en l'an III, à la clôture des leçons des Écoles normales, et au moment de la fondation de l'École polytechnique.

(**) Au moyen de ce qu'on a vu n° 766, ce procédé s'applique dans tous les cas possibles.

Pl. 63. Fig. 4. touchent à l'infini deux asymptotes PQ, RS, dont les parties indéfinies AP, AQ, AR, AS, sont les rayons des sections normales à courbure nulle (815).

Dans ce cas, on ne pourrait pas rectifier la courbe *caMdb*, *efngi*, *khNpq*, *lomrs*, tout entière : mais il suffirait d'en rectifier les arcs isolés *aMd*, *fng*, *hNp*, *omr*; car ils contiennent les points auxquels correspondent les rayons cherchés, puisque ces rayons sont ceux AM = AN, A*m* = A*n*, des cercles tangens aux courbes auxiliaires $d'd''d'''$.... $e'e''e'''$..., et *caMdb*, *efngi*, *khNpq*, *lomrs* (*).

836. Maintenant, soit que la surface donnée soit convexe ou qu'elle soit non convexe, on pourra déduire des constructions faites pour obtenir les rayons de courbure cherchés

Fig. 3 et Fig. 4. RS = R'S', *rs* = *r's'*, les directions des lignes de courbure en A. En effet, si l'on rapporte les lignes E'''S' et E'*s* en e'''N et $e'n$, sur la courbe auxiliaire $d'd''d'''$...$e'e''e'''$..., et que l'on mène les droites MAN, *m*A*n*, il est clair que ces droites seront les tangentes aux lignes de courbure de la surface.

De ce qu'on sait trouver, en chaque point d'une surface, les directions de ses lignes de courbure, il s'ensuit qu'on peut se figurer, sans autre secours que celui de la règle et du compas, la manière dont ces lignes se trouveront ployées sur cette surface, et cela peut suffire souvent dans la pratique : mais s'il fallait construire ces lignes, on ne pourrait le faire avec quelque rigueur sans l'aide de l'Analyse algébrique.

837. Ainsi, le problème de la recherche des lignes de courbure est, comme celui du développement d'une surface (649), insoluble jusqu'ici par la Géométrie. Les praticiens doivent s'en consoler aisément; ils ont dû remarquer que les solutions de nos questions générales étaient rarement applicables, et ils en concluront que si l'on trouvait un moyen rigoureux de construire synthétiquement les lignes de courbure, ce serait sûrement par un procédé si compliqué qu'il serait inutile.

C'est l'Analyse qui s'applique avec succès aux questions générales de Géométrie. Cependant, nous regrettons de ne pas pouvoir trouver par des considérations synthétiques, les lignes de courbure de l'ellipsoïde (838); mais nous ne résistons pas au désir de les construire, comme

---

(*) Les belles recherches de M. Dupin (*voyez* ses Développemens de Géométrie) l'ont conduit à des procédés d'une application beaucoup plus simple que ceux que nous venons d'exposer. Après avoir prouvé qu'on peut mener en chaque point d'une surface quelconque une surface du second degré osculatrice en son sommet à la surface donnée, et telle conséquemment que toutes les courbures des sections normales de cette dernière soient données par la surface osculatrice, il projette celle-ci sur le plan tangent à celle-là au point d'osculation, et il fait voir que toutes les courbures de la surface donnée peuvent être déterminées par le moyen du contour de la projection de la surface osculatrice. Il appelle *indicatrices* les sections coniques qui forment de tels contours; il déduit de leurs propriétés un grand nombre de conséquences très intéressantes, et il indique des moyens d'une pratique aisée pour construire les indicatrices.

D'après le plan de cet Ouvrage, où nous avons tâché de substituer partout l'art des constructions aux considérations analytiques les plus élémentaires, selon l'esprit de la science qui nous occupe, nous n'avons pu présenter ici les propres constructions de M. Dupin.

Les lignes $d'd''d'''$... $e'e''e'''$..., et *caMdb*, *efngi*, *khNpq*, *lomrs*, que nous employons, sont aussi des espèces d'*indicatrices* des courbures de la surface donnée; mais au lieu d'être les contours des projections d'une surface du second degré, ils sont ceux d'une autre surface qui est le lieu de tous les cercles osculateurs des sections normales en A. C'est en lisant l'ouvrage de M. Dupin que nous sommes arrivés aux résultat des nos 835 et 836.

un beau résultat d'Analyse, qui donnera l'idée du réseau dont les fils suivraient les courbures d'une surface, qui montrera l'utilité d'allier l'étude de l'Algèbre à celle de la Géométrie, et qui est employé dans le liv. 2. de la *Science du dessin*.

Concevons dans l'espace trois plans rectangulaires entre eux, l'un AB parallèle au plan vertical, l'autre A'B' parallèle au plan horizontal, et le troisième (DE, FG) perpendiculaire à la ligne de terre, et par conséquent aux deux premiers. Ces trois plans rectangulaires se couperont suivant les trois droites (AB, A'B'), (DE, C'), (C, FG). Pl. 66. Fig. 1.

Soient (CB, C'B'), (CD, C'), (C, C'F), trois lignes données, (CB, C'B') la plus grande et (C, C'F) la plus petite, et portons ces lignes de part et d'autre du point (C, C'), sur les lignes respectives (AB, A'B'), (DE, C'), (C, FG). Elles détermineront les trois lignes (AB, A'B'), (DE, C'), (C, FG), dont les grandeurs sont respectivement doubles de (CB, C'B'), (CD, C'), (C, C'F), et que nous appellerons les *axes principaux de l'ellipsoïde* (838).

Imaginons maintenant trois ellipses, la première ABDE passant par les quatre extrémités des axes principaux horizontaux, qui sont le grand et le moyen axe; la deuxième A'GB'F passant par les quatre extrémités du grand axe et du petit axe; la troisième enfin qui passe par les quatre extrémités du moyen et du petit axe, et dont un quart est rabattu en EH. On appelle ces ellipses, qui se rencontrent deux à deux aux extrémités des axes principaux, *ellipses principales*.

838. Il est évident que si un plan se meut parallèlement au plan A'B' de l'ellipse ADBE, il coupera toujours les deux autres ellipses (ou au moins tant qu'il sera entre les points F et G) en quatre points, qui détermineront une nouvelle ellipse dont ils seront les sommets. Cette dernière ellipse, variable à la fois de grandeur et de forme suivant la hauteur du plan horizontal qui la contient, est la génératrice d'une surface à laquelle on donne le nom d'*ellipsoïde*, parce qu'elle ne peut être coupée par un plan que suivant une ellipse.

Les six points (A, A'), (B, B'), (D, C'), (E, C'), (C, F), (C, G), s'appellent les *sommets* de l'ellipsoïde. (C, C') est son *centre*, et les lignes que nous avons appelées axes principaux et ellipses principales, en sont en effet les axes principaux et les ellipses principales.

839. On démontre facilement par l'analyse que le même ellipsoïde serait engendré si le plan de l'ellipse génératrice, au lieu de se mouvoir parallèlement à l'ellipse principale ADBE, se mouvait parallèlement à l'une quelconque des deux autres ellipses principales, ce qui donne le moyen de construire deux courbes elliptiques passant par un point donné de l'ellipsoïde, et d'obtenir immédiatement [puisqu'on sait mener des tangentes à ces courbes (874)] le plan tangent en ce point.

840. Si deux des axes principaux de cette surface devenaient égaux entre eux, il est clair que deux des ellipses principales seraient égales entre elles; que la troisième serait circulaire, et que la génératrice contenue dans le plan mobile parallèlement à cette dernière, ou, ce qui revient au même, mobile perpendiculairement au troisième axe, serait partout un cercle: d'où il suit que l'ellipsoïde général se changerait alors en un ellipsoïde de révolution.

Passons maintenant à la construction des lignes de courbure de l'ellipsoïde général.

841. Les arcs IJO', O'KL, d'une ellipse et d'une hyperbole auxiliaires, construites sur

Pl. 66. Fig. 1. des axes communs CO′ et CI, étant décrits de la manière que nous indiquerons ci-après (849), on aura les projections horizontales de la série de lignes d'une même courbure, en abaissant des points K de l'arc hyperbolique O′KL, les perpendiculaires KM, KN, aux axes DE, AB, et en construisant les ellipses MNPQ, concentriques à ADBE, et passant par les pieds M et N des perpendiculaires abaissées.

Les projections horizontales de la série des lignes de l'autre courbure s'obtiendront en abaissant des points J, de l'arc d'ellipse IJO′, les perpendiculaires JU, JR, aux axes, et en construisant les hyperboles TRS, VXY, concentriques à ADBE, qui auront pour demi-axes les lignes déterminées CR, CU.

842. Le demi-axe CO′, de l'ellipse et de l'hyperbole auxiliaires, est toujours plus petit que le demi-grand axe CB de l'ellipsoïde; il s'ensuit que le sommet commun O′ de ces courbes tombe toujours en dedans de l'ellipse principale ADBE. D'après cela, il est évident que la plus petite des ellipses, projection d'une ligne de courbure, a pour demi-grand axe le demi-grand axe commun CO′, et que son demi-petit axe est nul. Elle se confond par conséquent avec la ligne AB; d'où il résulte que l'ellipse principale (AB, A′FB′G) est elle-même une des lignes de courbure de la surface. A mesure que le grand axe des ellipses croît, le petit axe croît aussi; et lorsque le premier de ces axes est égal au grand axe de l'ellipsoïde, l'ellipse correspondante se confond avec l'ellipse principale ADBE, qui est aussi conséquemment une ligne de courbure. Il est inutile de construire des ellipses plus grandes que cette dernière; elles tomberaient toutes en dehors de l'ellipsoïde, et seraient étrangères à notre objet.

On voit donc que chacun des deux sommets O, O′, de l'hyperbole et de l'ellipse auxiliaires, est embrassé d'un même côté par toutes les ellipses, lesquelles se resserrent toujours à mesure que leurs sommets en approchent, et ne perdent leur petit axe que lorsqu'elles atteignent ces sommets.

Quant aux hyperboles, il est clair qu'aucune d'elles ne peut avoir, dans le sens AB, un axe plus grand que l'axe O′O, commun à l'ellipse et à l'hyperbole auxiliaires. Celles pour laquelle l'axe a cette grandeur, a son autre axe nul, et se confond avec AB; à mesure que cet axe diminue l'autre augmente, de manière que, lorsque celui-ci est le plus grand possible, le premier devient nul à son tour, et alors les deux branches de l'hyperbole se confondent avec la ligne DE. Ainsi, la troisième ellipse principale est encore, comme les deux autres, une des lignes de courbure de la surface. Chacun des sommets O, O′, communs à l'ellipse et à l'hyperbole auxiliaires, est embrassé par toutes les hyperboles, mais du côté opposé à celui où les ellipses l'embrassent. Les hyperboles se resserrent à mesure qu'elles approchent de ces sommets, et elles ne perdent leur petit axe que lorsque leur sommet particulier atteint ces mêmes sommets : il en est ainsi pour les ellipses.

843. Ces points, vers lesquels les ellipses et les hyperboles tournent leurs concavités, sont les projections de quatre points (O, O″), (O, O‴), (O′, O″), (O′, O‴), très remarquables; deux d'entre eux sont placés au-dessus du plan A′B′ et deux au-dessous. Ce sont quatre *ombilics*, autour desquels les lignes de courbure sont ployées, toutes les unes d'un côté, et toutes les autres du côté opposé, de telle manière qu'elles changent d'espèce quand leurs sommets atteignent ces ombilics.

844. Les lignes de courbure étant déterminées en projection horizontale, il serait facile

d'en conclure leurs projections verticales, puisque la condition qu'elles soient sur la surface les détermine complètement, mais il sera beaucoup plus commode de continuer d'employer les résultats analytiques. Pl. 66. Fig. 1.

Supposons l'arc *abcd*, d'une ellipse auxiliaire concentrique à A'FB'G, décrit sur les demi-axes C'*d*, C'*a*, dont nous verrons la construction plus bas (851). Pour avoir la projection verticale d'une ligne de courbure projetée horizontalement] suivant une hyperbole TRS, VXY, on mettra le point T, qui appartient à l'ellipse principale (ADBE, A'B'), en projection verticale en *t*; on élevera par le point *t* la perpendiculaire *tb* à A'B'; par le point *b*, où elle rencontrera l'ellipse auxiliaire *abcd*, on abaissera la perpendiculaite *be* sur FG, et l'ellipse *ertr'e'y'xye*, dont les demi-axes sont C'*t* et C'*e'*, contiendra la projection verticale *rtr'*, *y'xy*, de la ligne de courbure dont TRS, VXY, est la projection horizontale.

On aura la projection verticale d'une ligne de courbure projetée sur le plan horizontal suivant une ellipse MNPQ, en mettant le point de cette ligne qui se projette en M, et qui se rabat en Z sur l'ellipse principale EZH, en projection verticale en *m*, au moyen de l'arc *zm*, et en menant par ce point *m* l'ellipse *mnin'pr''fr'''m*, concentrique à A'FB'G et dont les demi-axes C'*m*, C'*i*, sont déterminés au moyen de l'ellipse auxiliaire *abcd* et des droites *mc*, *ci*, respectivement perpendiculaires à FG et A'B'. Les arcs *r''pn'*, *r'''mn*, que cette ellipse *mnin'pr''fr'''m* déterminera, seront les projections verticales des deux lignes de courbure projetées horizontalement en MNPQ.

845. Il suit de là que les lignes des deux courbures de l'ellipsoïde se projettent toutes sur le plan vertical, c'est-à-dire sur le plan AB du grand et du petit axe, suivant des ellipses dont le centre est en C' : et l'ellipse principale (AB, A'FB'G), étant une ligne de courbure, est nécessairement une de ces ellipses; d'où il résulte que les perpendiculaires G*g*, B'*g*, élevées aux extrémités G et B' des axes FG, A'B', de cette ellipse principale, se rencontrent en un point *g* de l'ellipse auxiliaire *abcd*.

Tous les points de l'arc *ag* de l'ellipse auxiliaire, donnent des ellipses *ete'x*, dont l'axe horizontal *xt* est plus petit que l'axe A'B' de l'ellipse principale A'FB'G, et dont l'axe vertical *e'e* est plus grand que l'axe FG, de la même ellipse principale. Ces ellipses, qui se resserrent à mesure que l'axe *ee'* s'alonge, et qui se confondent avec la droite FG, lorsque le grand axe est égal à celui de l'ellipse auxiliaire *abcd*, divisent l'aire de l'ellipse principale en zones dirigées dans le sens FG. Au contraire l'arc *gd*, de l'ellipse auxiliaire, donne des ellipses qui toutes ont leurs axes dans le sens FG, plus petits, et ceux dans le sens A'B', plus grands, que les axes correspondans à l'ellipse principale A'FB'G. Ces ellipses, qui se resserrent à mesure que l'axe dans le sens A'B' croît, et qui se confondent avec A'B' lorsque cet axe est égal à celui de l'ellipse auxiliaire, divisent l'aire de l'ellipse principale A'FB'G en zones dirigées dans le sens A'B'; et chacune d'elles coupe chacune de celles de la première espèce en quatre points, qui sont compris en dedans de l'ellipse principale.

M. Monge, après avoir démontré que toutes ces ellipses sont inscrites dans un losange, dont le centre est en C' et dont les points *a* et *d* sont deux des angles, termine ainsi qu'il suit la belle théorie dont nous avons tiré ce qui précède.

846. « S'il était question de voûter un espace circonscrit en projection horizontale par

une ellipse, on ne pourrait pas donner à la voûte une surface plus convenable que celle de la moitié d'un ellipsoïde dont une des ellipses principales coïnciderait avec l'ellipse de la naissance; et en supposant que cette voûte dût être exécutée en pierre de taille, il faudrait que la division en voussoirs fût opérée au moyen des lignes de courbure dont nous avons donné la construction, et que les joints fussent les surfaces développables normales à la voûte. Les lignes de division en voussoirs traceraient sur la surface des compartimens rectangulaires susceptibles de décoration, et ces compartimens eux-mêmes n'auraient rien de fantastique, puisqu'ils ne seraient qu'une suite nécessaire de la première donnée, qui est une ellipse; mais la destination de l'édifice pourrait influer sur le choix de celui des trois axes qu'il faudrait placer verticalement.

» Il n'y aurait aucune raison pour faire l'axe vertical égal à l'un des deux axes horizontaux; ainsi les trois axes seraient inégaux. Dans cette hypothèse, l'axe vertical pourrait être plus grand que les deux autres, et alors la voûte serait surmontée; il pourrait être plus petit, et la voûte serait surbaissée; enfin, il pourrait être compris entre les deux autres, et la voûte serait moyenne. La voûte surmontée aurait en général plus de hardiesse et plus de dignité; et si la naissance était elle-même à une grande hauteur, quelle que fût d'ailleurs la destination de l'édifice, ce serait la voûte surmontée qu'il faudrait employer, parce que sa grande élévation faisant paraître ses dimensions verticales plus petites qu'elles ne seraient réellement, écraserait trop une voûte d'une autre espèce. La voûte surbaissée, en diminuant le volume de l'air compris dans l'emplacement, serait plus favorable à la voix d'un orateur. Si l'édifice devait être éclairé par deux lustres suspendus à la voûte, il faudrait que cette voûte fût ou surmontée ou surbaissée, parce que dans ces deux cas sa surface aurait deux ombilics, placés symétriquement au-dessus du grand axe de l'ellipse horizontale, et que ces ombilics, rendus très apparens par les compartimens qui se distribueraient autour d'eux, seraient les points naturels de suspension : alors on pourrait disposer du rapport entre les trois axes, pour que ces points fussent espacés d'une manière convenable.

» Au contraire, si l'édifice devait avoir quatre grandes ouvertures, ou si la voûte devait être portée par quatre groupes de colonnes, ou enfin si, dans la décoration intérieure, on employait quatre supports distribués symétriquement, il faudrait choisir la voûte moyenne pour laquelle les quatre ombilics sont toujours dans la naissance, et placer les massifs ou les supports aux quatre extrémités des axes, parce que c'est aux environs de ces quatre points, et loin des ombilics, que les lignes de courbure, rendues apparentes par la décoration de la voûte, et qui d'ailleurs rencontrent toutes verticalement la naissance, s'écartent plus lentement de la ligne de plus grande pente de la surface.

847. » On s'occupe aujourd'hui (*) de la construction de salles pour les deux conseils de la législature : les emplacemens dont on a pu disposer jusqu'à présent pour de semblables salles, ont forcé de donner à l'amphithéâtre moins de profondeur en face de l'orateur que sur les côtés; mais l'expérience ayant prouvé que la voix se porte à une plus grande distance en face, il paraît que c'est une disposition toute contraire qu'on devrait adopter. De toutes

(*) M. Monge écrivait ce passage en l'an III.

les formes alongées que l'on pourrait donner à l'amphithéâtre, il n'y en a aucune dont la loi soit plus simple et plus gracieuse que l'ellipse : il faudrait donc que la salle fût elliptique, et qu'elle fût couverte par une voûte en ellipsoïde surbaissée.

» Le service des assemblées législatives exige un emplacement pour le bureau, en avant duquel est la tribune de l'orateur. En plaçant le bureau à un des sommets de l'ellipse, on pourrait lui consacrer un espace suffisant pour la commodité du service, et l'orateur se trouverait naturellement placé sous un des ombilics de la voûte : l'amphithéâtre n'occuperait que la partie qui serait en avant. Une galerie qui ferait le tour entier de la salle, et qui serait assez élevée pour être très distincte de l'amphithéâtre, fournirait des places au public. La salle, qui n'aurait ni tribune ni aucune espèce d'irrégularité, pourrait être décorée par des colonnes, à chacune desquelles correspondrait une nervure de la voûte, pliée suivant la ligne de courbure ascendante. Toutes ces nervures, verticales à leur naissance, se courberaient autour de l'un ou de l'autre ombilic, pour redescendre ensuite à plomb sur les colonnes opposées, et elles seraient croisées perpendiculairement par d'autres nervures pliées suivant les lignes de l'autre courbure. Les intervalles de ces nervures pourraient être à jour, soit pour éclairer la salle, soit pour donner des issues à l'air, et formeraient un vitrage moins fantastique que les roses de nos églises gothiques. Enfin, deux lustres suspendus aux ombilics de la voûte, et à la suspension desquels la voûte entière semblerait concourir, serviraient à éclairer la salle pendant la nuit.

» Nous n'entrerons pas dans de plus grands détails à cet égard; il nous suffit d'avoir indiqué aux artistes un objet simple, et dont la décoration, quoique très riche, pourrait n'avoir rien d'arbitraire, puisqu'elle consisterait principalement à dévoiler à tous les yeux une ordonnance très gracieuse, qui est dans la nature même de cet objet (*). »

848. C'est d'après cette idée de M. Monge que l'épure est construite. On a divisé l'ellipse des naissances ADBE en parties égales st', $t'u$, uS, Sv, etc., et par chaque point de division S, on a mené une ligne de courbure dont la projection verticale est $r'tr$, et dont la projection horizontale est SRT (on verra plus loin (850) le moyen d'obtenir le point R, étant donné le point S, ou, ce qui revient au même, étant donné le point T). De cette manière, on a obtenu toutes les lignes de courbure ascendantes. Pl. 66. Fig. 1.

Pour obtenir le second système de lignes de courbure, on a divisé l'ellipse principale DE, en un nombre impair de parties $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, γZ, etc., et par chaque point de division on a mené une ligne de courbure. La plus grande de ces parties, dont la moitié est $H\alpha$, est au sommet supérieur, elle est égale à st' : les autres vont en diminuant graduellement de grandeur jusqu'au point E.

(*) Le lecteur qui aura vu avec plaisir les détails dans lesquels nous venons d'entrer, et qui sera un peu familiarisé avec l'application de l'Algèbre à la Géométrie, lira avec le plus grand intérêt le 4e Mémoire des *Développemens de Géométrie* de M. Dupin.

Il verra entre autres propriétés, 1°. qu'étant donnée une surface du second degré, on peut toujours déterminer trois groupes de surfaces du même degré, dans l'un desquels se trouve la surface donnée, tels que chaque surface d'un de ces groupes coupe toutes celles des autres groupes partout à angle droit; 2°. que les surfaces d'un des groupes sont des ellipsoïdes, et celles des autres groupes des hyperboloïdes à une nappe et des hyperboloïdes à deux nappes; 3°. comment on peut employer ces surfaces, qu'on appelle *surfaces trajectoires orthogonales réciproques*, à la construction des lignes de courbure de la surface donnée.

Pl. 66. Fig. 1. Exposons maintenant, et toujours d'après M. Monge, les constructions que nous avons renvoyées à la fin de ce chapitre.

849. D'abord occupons-nous de l'ellipse auxiliaire IJO'.

Fig. 3. « Soient ADB la moitié de la grande ellipse horizontale qui passe par les naissances de la voûte surbaissée; F, F, ses foyers; AVe le quart de l'ellipse verticale dont le plan passe par AB; f, f, ses foyers; DUE l'ellipse qui passe par KD, et *f* un de ses foyers. Pour construire le point O' on portera Kf et KF sur l'autre axe, de K en f' et F'; on menera f'B, et par le point F' on lui menera une parallèle F'O', qui, par son intersection avec l'axe AB, déterminera le point O'. De même, on portera K*f* sur l'autre axe, de K en *f*'; on menera la droite *f*'D, et par le point F, on lui menera une parallèle FI, qui, par sa rencontre avec l'axe KD prolongé, déterminera le point I. »

Fig. 1. La construction de l'hyperbole auxiliaire O'KL ne présente aucune difficulté, parce que cette hyperbole a les mêmes axes CI, CO', que l'ellipse IJO'.

850. Etant donné le point S, construisons actuellement le point R, ou, ce qui revient

Fig. 2. au même, étant donné le point R, sur la fig. 3, construisons le point P.

Du point R on abaissera sur AB la perpendiculaire RT; on menera la droite f'T, et la droite F'P menée par le point F', parallèlement à f'T, déterminera sur AB le point cherché P.

Fig. 1. 851. Passons enfin à la construction de l'ellipse verticale *abcd*.

Fig. 2. « Soient AB le grand axe de l'ellipsoïde; KD la moitié de l'axe moyen; KE la moitié du petit axe; F, F, les foyers de la grande ellipse, dont on a représenté le quart par ASD; f, f, les foyers de l'ellipse moyenne AOE, et *f* un des foyers de la petite ellipse DU*e*. Pour construire le sommet X de l'ellipse auxiliaire XLG, on portera KF et Kf sur l'autre axe, de K en F' et f'; on menera F'B, et par le point f' la parallèle f'X, qui, par sa rencontre avec l'axe AB prolongé, déterminera le point X. De même, pour l'extrémité G de l'autre axe, on portera K*f* sur AB, de K en *f*'; on menera la droite *f*'E, et par le point f la parallèle fG, qui, par sa rencontre avec l'axe KE prolongé, déterminera le point G. »

852. Ce problème des lignes de courbure de l'ellipsoïde, que l'on tenterait sans doute vainement de résoudre par des moyens purement graphiques, doit montrer la beauté et la fécondité des méthodes analytiques, et la nécessité d'étudier l'Algèbre pour tirer de la Géométrie tout le parti possible.

853. Ces deux branches des Mathématiques, l'Analyse et la Géométrie, ont chacune des avantages particuliers et une élégance qui leur est propre. L'Analyse conduit au but sans tâtonnement; elle donne des résultats dont la généralité s'étend aussi loin que l'imagination; son élégance résulte de la facilité et de la rapidité de sa marche; ses avantages sont une extrême rigueur et des résultats qui donnent sans effort toutes les propriétés que comporte le sujet que l'on traite. La Géométrie au contraire ne présente que des conceptions dont la généralité, comparée à celle de l'Analyse, est extrêmement bornée; sa marche est incertaine et tout-à-fait dépendante du plus ou moins de pénétration de celui qui l'emploie : mais elle n'a rien de

mystérieux, parce qu'elle s'applique à des grandeurs, et procède par des moyens, qu'on se représente physiquement, et qu'on peut considérer sous tous les aspects. En un mot, son mécanisme est palpable, et il offre partout le plus haut degré possible d'évidence et de clarté. Enfin, elle a sur l'Analyse, dans la méthode des projections, l'avantage infiniment précieux de s'appliquer aux problèmes dont les données ne sont pas soumises à la loi de continuité. C'est cet avantage particulier qui la rend éminemment propre aux arts, dont l'Analyse ne peut traiter que des questions abstraites.

NOTES.

854. Nous avons tâché d'incorporer dans cet ouvrage tout ce qui était nécessaire au développement des diverses parties de la Géométrie descriptive; mais il y a des propositions et des théories qui n'ont pourtant pas dû y trouver place, et qui font la matière de ces Notes.

Au premier rang de ces théories se trouve l'exposition simple et synthétique des propriétés de l'ellipse, de l'hyperbole, et de la parabole. La loi que nous nous sommes imposée, de traiter la Géométrie descriptive sans autre secours que celui de la Géométrie élémentaire, nous obligeait à donner la théorie de ces lignes : nous aurions pu la placer dans le livre des Préliminaires, où se trouve celle des développées et des développantes, et celle des hélices ; nous avons préféré en faire l'objet de la note 1re, parce que cette théorie ayant été étudiée par les personnes qui ont vu l'application de l'Algèbre à la Géométrie, et ces personnes, dans l'état actuel de l'enseignement, devant former la majeure partie de nos lecteurs, cette même théorie est réellement étrangère à ce Traité.

NOTE PREMIÈRE.

De l'ellipse, de l'hyperbole et de la parabole.

Pl. 67. Fig. 1. 855. De l'ellipse. Concevons qu'un fil inextensible et parfaitement flexible FMF', soit attaché par ses extrémités aux points fixes F et F', et qu'un poinçon vertical, dont la pointe soit en M, se meuve le long de ce fil en le tendant constamment, la courbe AB'A'B, décrite par le point M, sera ce qu'on nomme une *ellipse*.

Les points F et F' s'appellent ses *foyers* ; et les lignes FM, F'M, menées des foyers à un même point M de l'ellipse, sont les *rayons vecteurs* correspondans à ce point.

856. Pour construire une ellipse, étant donnés les points F et F', et la longueur FM + MF' du fil, on portera cette longueur sur FF', à partir d'un des points F et F' vers l'autre, de F en D, par exemple ; cela fait avec un rayon FM, plus petit que FD, et d'ailleurs quelconque, on décrira, des points F et F' comme centres, quatre arcs mnp, $m'n'$, $m''n''$, $m'''n'''$, dont le premier mnp vienne rencontrer FF' en un point p ; ensuite avec $Dp = FD - Fp$, comme rayon, et du point F' comme centre, on décrira quatre nouveaux arcs qr, $q'r'$, $q''r''$, $q'''r'''$, qui couperont les quatre premiers en quatre points M, M', M'', M''', appartenant à l'ellipse, puisque les longueurs MF + MF', M'F + M'F', M''F + M''F', M'''F + M'''F', seront égales à FD. En faisant varier le rayon FM, on obtiendra successivement 8, 12, 16, etc., points de l'ellipse, et enfin on aura bientôt assez de ces points pour mener un trait AB'A'B, qui coïncide avec elle (*).

(*) *Voyez*, n° 612, un autre moyen de décrire l'ellipse.

Si l'on prend le rayon FM égal à la moitié de FD on aura $F'M = FM$, et les arcs mn, $m'n'$, etc., qr, $q'r'$, etc., donneront les deux points B' et B de la courbe situés sur la droite BB', élevée par le milieu C des points F et F', perpendiculairement à FF'. Si ensuite on porte le même rayon $\frac{1}{2}$ FD de C en A, et de C en A', il est clair qu'on aura les points A et A' de l'ellipse situés sur la droite FF'. Pl. 67. Fig. 1.

857. Il résulte évidemment de la construction des points M, M', etc., que l'ellipse est une courbe symétrique par rapport aux droites AA' et BB'; car elle est formée de systèmes de quatre points, tels que M, M', M", M‴, situés sur quatre droites MM' et M‴M", MM‴ et M'M", respectivement perpendiculaires aux lignes AA' et BB', et divisées par ces lignes en deux parties égales. On nomme, par cette raison, les droites AA', BB', terminées en A, A', B et B', les *axes* de l'ellipse. Celui AA', qui contient les foyers F et F', est le *grand axe*; l'autre BB' est le *petit axe*.

Les quatre points A, A', B et B' s'appellent les *sommets* de la courbe.

858. On voit qu'étant donnés les deux axes AA', BB', si l'on décrit du point B ou B', comme centre, avec un rayon CA égal au demi-grand axe, deux petits arcs iF, i'F', ils couperont la droite AA' aux foyers F et F'.

859. Le point C, où se coupent les axes, jouit de la propriété que si par un point quelconque M' de l'ellipse on mène la droite M'C, elle ira rencontrer cette ellipse en un point M‴, et qu'on aura $CM' = CM‴$.

Ce point C, et en général tout point qui divise en parties égales toutes les droites terminées comme M'M‴ à une même courbe, ou à une même surface, reçoit la dénomination de *centre*, et chaque droite M'M‴, menée par le centre, celle de *diamètre*.

La distance $CF = CF'$, du centre aux foyers, se nomme l'*excentricité*.

860. Concevons que pour deux ellipses ABA'B', $aba'b'$, on ait la proportion Fig. 2.

$$AA' : BB' :: aa' : bb',$$

les droites AB, ab, seront parallèles, et si l'on augmente l'échelle de la plus petite dans le rapport de AA' à aa', il est évident qu'elle coïncidera avec la plus grande. On appelle, par cette raison, ces ellipses des courbes *semblables*.

861. De l'hyperbole. Si l'on imagine qu'un poinçon M se meuve le long d'un fil passant par les points F et F', et variable de longueur tellement que la différence des parties droites FM, MF', de ce fil, soit une longueur constante FD, le point M décrira une ligne MAM'...M‴A'M" que l'on nomme une *hyperbole*. Fig. 4.

Les points F et F' s'appellent ses *foyers*, et les droites MF, MF', menées des foyers à un point M de la courbe, s'appellent les *rayons vecteurs* de ce point.

862. Pour construire l'hyperbole on menera la droite FF'; on prendra sur cette droite, à partir d'un foyer et en allant vers l'autre, la longueur FD à laquelle est égale la différence des deux rayons vecteurs d'un même point; cela fait, avec un rayon Fp, au moins égal à la moitié de FD, et d'ailleurs quelconque, on décrira, des points F et F' comme centres, quatre arcs mnp, $m'n'$, $m''n''$, $m'''n'''$; puis avec le rayon $Dp = Fp + FD$, on décrira, des mêmes points F et F' comme centres, quatre nouveaux arcs qr, $q'r'$, $q''r''$, $q'''r'''$, qui couperont les quatre premiers en quatre points M, M', M", M‴, appartenant à l'hy-

Pl. 67. Fig. 4. perbole, puisque les différences de leurs rayons vecteurs seront égales à FD. En faisant varier le rayon FM, on obtiendra successivement 8, 12, 16, etc., points, comme M, M′, M″, M‴, et bientôt on aura un nombre suffisant de ces points pour mener un trait qui les réunisse et qui coïncide avec l'hyperbole.

Si on porte sur la droite FF′, à partir du point C milieu de cette droite, les longueurs CA, CA′, égales à la moitié de FD, les points A et A′ seront ceux où la courbe coupe la droite FF′.

863. D'après ce qui précède, il est évident que l'hyperbole est composée de deux branches séparées, symétriques 1°. par rapport à la droite AA′; 2°. par rapport à la droite BB′, élevée par le point C perpendiculairement à AA′.

Les deux droites AA′, BB′, s'appellent par cette raison les *axes* de l'hyperbole. La première AA′, limitée aux deux branches MAM′, M‴A′M″, se nomme l'*axe réel;* l'autre BB′, qui ne rencontre pas la courbe, s'appelle l'*axe imaginaire.*

On donne à cet axe imaginaire une grandeur BB′ telle, que la moitié CB′ = AP de cette grandeur, soit le côté d'un triangle rectangle CAP, dont l'hypoténuse CP soit égale à CF, et dont le côté CA adjacent à l'angle droit soit la moitié CA de AA′. Il s'ensuit que la longueur BB′, de l'axe imaginaire, peut excéder celle AA′ de l'axe réel.

864. Les points A et A′ s'appellent les *sommets* de l'hyperbole. Quelquefois on les nomme les *sommets réels;* alors les points B et B′ prennent le nom de *sommets imaginaires.*

Étant donnés les quatre sommets A, A′, B, B′, situés sur deux droites rectangulaires AA′, BB′, on en déduira les foyers F et F′ en prenant sur le plus grand les distances CF, CF′, égales à l'hypoténuse AB = CP du triangle ACB.

Si l'on avait AA′ = BB′, la courbe serait ce qu'on nomme une *hyperbole équilatère.*

865. Il est clair que si par un point quelconque M de la courbe MAM′...M‴AM″, et par le point C, on mène une droite MC, elle ira couper cette courbe en un autre point M″ tel, qu'on ait CM = CM″. Le point C se nomme par cette raison (859) le *centre* de l'hyperbole, et toute droite comme MM″ est un de ses *diamètres.*

Fig. 6. 866. Lorsque deux hyperboles MAN...M′A′N′, *man...m′a′n′*, ont des axes AA′ et BB′, *aa′* et *bb′*, proportionnels, en sorte que dans les triangles ABC, *abC*, les hypoténuses AB, *ab*, soient parallèles, on dit que ces hyperboles sont *semblables*, parce que dans ce cas, il suffit évidemment de mettre la plus petite *man...m′a′n′*, sur une nouvelle échelle, qui soit à l'échelle de la première dans le rapport de CA à C*a*, pour que ces deux hyperboles coïncident en une seule.

Fig. 3. 867. DE LA PARABOLE. Imaginons qu'un point M se meuve de manière à être toujours également éloigné d'un point F et d'une droite BD, la ligne MAM′, qu'il décrira, est ce qu'on nomme une *parabole.*

Le point F est son *foyer;* BD est ce qu'on appelle sa *directrice;* la perpendiculaire AX menée par le foyer F à la directrice BD est son *axe;* le point A situé à la moitié de la distance du foyer à la directrice est son *sommet,* et toutes les lignes telles que FM sont ce qu'on nomme ses *rayons vecteurs.*

868. Si du point F comme centre, avec un rayon FM, plus grand que AF et d'ailleurs quelconque, on décrit deux arcs *mn*, *m′n′*; qu'ensuite on porte le rayon FM en GP, et

qu'on mène la droite pPq, parallèle à la directrice BD, cette droite coupera les arcs décrits mn, $m'n'$, en deux points M et M', également distans du point F et de BD, et appartenant par conséquent à la parabole. D'après cela il sera aisé d'obtenir assez de points de cette courbe pour pouvoir la tracer. Pl. 67. Fig. 3.

869. En comparant la construction de l'ellipse (856) et celle de la parabole, on voit que la droite pq n'étant autre chose qu'un arc de cercle décrit, avec un rayon infini, d'un point pris pour centre à une distance infinie à droite du point F sur l'axe AX, la parabole est une véritable ellipse dont le grand axe serait infini, ou ce qui revient au même dont l'excentricité serait infinie, et dont le centre conséquemment serait à une distance infinie du sommet.

On peut voir de même (862) que la construction de la parabole est absolument celle de la branche M''A'M''' d'une hyperbole dont le foyer F se serait éloigné à l'infini, à l'opposé de F'. En effet, le grand axe AA' se trouverait infini : ayant donc décrit du point F' comme centre, deux arcs $m''n''$, $m'''n'''$, le rayon FM''' serait infini, et les arcs $q''r''$, $q'''r'''$, se trouveraient remplacés par une droite xy perpendiculaire à A'X', et distante du point D d'une longueur Dz, qui serait égale à F'M'''; donc la courbe M''A'M''' serait une parabole ayant pour foyer le point F', et pour directrice une droite menée par le point D. Fig. 4.

Mais il faut bien remarquer que lorsque l'on considère une parabole comme étant une ellipse, le deuxième foyer de cette ellipse est à une distance infinie du premier, et du même côté F que ce dernier, par rapport au sommet A, tandis que si cette parabole est considérée comme une hyperbole, son deuxième foyer sera aussi à une distance infinie du premier, mais du côté G, opposé à F, par rapport au sommet A. Fig. 3.

870. Puisque la parabole est une courbe qui a son centre à l'infini, ou, ce qui est la même chose, qui n'a pas de centre, elle n'a pas non plus ce qu'on appelle des diamètres (859). Cependant, à cause de son analogie avec l'ellipse et l'hyperbole, on désigne toute ligne MF', etc., qui part d'un de ses points, qui est parallèle à son axe, et qui en conséquence concourt vers son centre à l'infini, sous le nom de *diamètre*.

871. La corde II', menée par le foyer, parallèlement à la directrice, étant composée de deux parties FI' = FI = FG = 2AF, on voit que II' est égale à quatre fois la distance du sommet A au foyer F. On donne à cette corde le nom de *paramètre*. Si par le point A on mène des droites AI, A'I', sous des angles PAI, PAI', tels que, dans des triangles analogues à AFI, AFI', le rapport de FI ou FI' à AF soit égal à 2, ces droites couperont la parabole aux extrémités I et I' du paramètre. Connaissant donc une parabole MAM' et son axe AX, on saura construire son paramètre II', lequel déterminera le foyer F.

872. Quels que soient les paramètres II', ii', de deux paraboles MNAN'M', $mnAn'm'$, dont les droites BD et bd sont les directrices, les triangles AFI', Afi', seront toujours semblables, et il est évident qu'il suffira de multiplier l'échelle de la plus petite, par le rapport de II' à ii' des deux paramètres, pour qu'elles soient superposables : donc toutes les paraboles possibles sont semblables, ou bien elles ne sont qu'une seule et même courbe rapportée sur des échelles différentes. Fig. 5.

873. Des tangentes *à l'ellipse, à l'hyperbole, et à la parabole*. Les trois courbes

dont il vient d'être question pouvant être décrites au moyen d'un poinçon (855, 861 et 867) qui tend un fil assujetti à certaines conditions, il est manifeste qu'en chacun de
Pl. 67. Fig. 2. leurs points le point décrivant M suit une certaine direction : or, la ligne droite TM, qui a cette direction, est ce qu'on nomme la *tangente* à la courbe en M.

Si par le point M on élève la droite MR, perpendiculaire à la tangente TM, cette droite sera la *normale* en M.

D'après cela il va être facile de trouver les tangentes.

874. Soit M un point de l'ellipse ABA'B' : on remarquera qu'au moment où le point décrivant est en M, il décrirait le même élément infiniment petit de la courbe, s'il se mouvait dans le sens AMB', ou dans le sens B'MA ; car la configuration de cette courbe, résultante de sa construction, ne dépend pas du sens du mouvement du poinçon décrivant. Donc ce poinçon se mouvra, en M, dans une direction dépendante des lignes MF, MF', et indépendante de leurs longueurs respectives : donc il se mouvra comme s'il était l'extrémité d'un fil MR, divisant l'angle FMF' en deux parties égales, et attaché quelque part en un point de la droite MR. Mais, dans ce dernier cas, le point mobile décrirait un arc de cercle, et l'élément correspondant au point M serait sur la tangente de cet arc ; c'est-à-dire sur une ligne perpendiculaire au rayon MR. Donc la tangente en M, à l'ellipse, est la perpendiculaire TM à la droite MR qui divise l'angle FMF' des rayons vecteurs en deux parties égales, ou, ce qui est la même chose, la tangente TM est la droite qui divise en deux parties égales l'angle d'un des rayons vecteurs FM, du point M, et du prolongement M*f*, de l'autre rayon vecteur MF'.

Quant à la normale MR, on vient de voir qu'elle est la droite qui donne l'angle FMR égal à RMF'.

Fig. 7. 875. Soit M un point d'une hyperbole ; les rayons vecteurs correspondans seront MF et MF'. Or le point M, considéré comme point décrivant, engendrera la même courbe soit qu'il marche dans un sens, ou dans le sens opposé ; donc la direction de la courbe en M est indépendante des longueurs MF, MF', et dépend seulement des directions des fils FM, F'M, tendus vers M. Donc enfin, cette direction est celle de la droite MT qui, en divisant l'angle FMF' en deux parties égales, ne participe pas plus de la position de MF que de celle de MF'.

La normale en M sera par conséquent la droite MR, qui divisera en deux parties l'angle d'un des rayons vecteurs F'M, et du prolongement M*f* de l'autre rayon vecteur MF.

876. Cherchons les tangentes dont les points de contact sont à l'infini, et pour cela voyons d'abord dans quelles directions, à partir du centre, se trouvent les points de l'hyperbole situés à l'infini.

On remarquera que les rayons vecteurs FM, F'M, qui aboutissent à un point quelconque M, sont tels que l'arc D*k*G, décrit du point F comme centre, avec un rayon FD égal au grand axe AA', est touché sur FM, au point de contact *k*, par l'arc F'*k*, décrit du point M comme centre avec le rayon vecteur F'M comme rayon. Or, si le point M s'éloigne à l'infini, l'arc D*k*G restera le même, et celui qui remplacera F'*k*, étant décrit avec un rayon infini, se trouvera une droite qui devra toucher l'arc D*k*G, et qui sera par conséquent la tangente F'G, menée par le point F' à l'arc D*k*G ; donc le point situé à l'infini sera sur la droite FGL. Mais il sera aussi sur le rayon vecteur F'*l*, parallèle à FGL, et comme

il est sur un diamètre, il sera encore sur une autre droite CS, menée par le point C parallèlement à FL. Examinons les conditions qui déterminent cette dernière droite, et nous verrons qu'elle passe par le point P, situé sur la perpendiculaire AP, à une distance AP de AA′ égale au demi-petit axe CB. En effet, le triangle CF′n est semblable à FF′G, et puisque CF′ est la moitié de FF′, on aura Cn $= \frac{1}{2}$ FG $= \frac{1}{2}$ FD $=$ CA; d'où il suit que les triangles CnF′, CAP, sont rectangles, l'un en n et l'autre en A : mais l'hypoténuse CP, de l'un, égale celle CF′ de l'autre (864); donc ces triangles sont superposables; donc leurs angles A′Cn, ACP, sont les mêmes : donc le diamètre CS, qui aboutit à l'infini, est celui qui passe par le point P. Pl 67. Fig. 7.

Cela posé, il est facile d'obtenir la tangente à l'infini. On sait qu'elle doit diviser l'angle des rayons vecteurs en deux parties égales: ces rayons sont les droites FL, F′l; ils forment un triangle isoscèle dont la base est F′G; la droite CS joint le milieu n de cette base et le sommet de ce triangle; donc la droite CS divise l'angle des rayons vecteurs FL, F′l, en parties égales : donc elle est la tangente cherchée.

877. On donne à cette droite, et en général à toute droite qui touche une courbe à l'infini, la dénomination d'*asymptote*.

Il suit donc de ce qui précède que l'hyperbole a ses deux branches comprises entre deux droites S′S, $s's$, qui se croisent par son centre, qui sont les directions des diagonales du rectangle P′Ppp', formé sur les axes AA′, BB′, et qui touchent ces branches à l'infini en quatre points.

878. On remarquera en passant que la tangente TM, nécessairement perpendiculaire à la corde de l'arc F′k, puisque les angles FMT, TMF′, sont égaux, coupe toujours AA′ entre les points A′ et C, et qu'à mesure que le point M s'éloigne de A′, cette tangente s'approche de plus en plus de faire avec AA′ un angle dont la limite de diminution est A′CS; d'où il suit que le point M, à mesure qu'il s'éloigne, s'approche toujours de plus en plus de l'asymptote CS, sans cependant la toucher jamais, car il ne la joint qu'à l'infini.

Soit enfin M un point d'une parabole : si on la considère comme une ellipse dont le foyer soit à l'infini vers X, les rayons vecteurs en M seront MF, d'une part, et MF′ parallèle à AX, d'autre part; la tangente à l'ellipse ou à la parabole sera donc la droite TM, qui divise en parties égales l'angle FMD, de FM et du prolongement MD de MF′. Fig. 3.

879. La parabole étant aussi une hyperbole dont un foyer serait à l'infini, à l'opposé du point X, on doit par cette considération trouver la même tangente TM, et c'est ce qui arrive effectivement, puisque les rayons vecteurs du point M sont alors les droites FM, Md, et que la tangente à l'hyperbole devant diviser leur angle en deux parties égales, elle coïncide avec la droite déjà obtenue TM.

880. De ce que les angles TMD, TMF, sont égaux, et de ce que DMT et FTM sont alternes internes, il s'ensuit que TMF $=$ FTM, et que le triangle TFM est isoscèle, ce qui donne FT $=$ FM. Pour avoir la tangente en M à la parabole, il faut donc porter le rayon vecteur FM en FT, et mener TM. Cette propriété va nous en fournir une autre fort usuelle; mais avant de la démontrer, il faut que nous fassions connaître le moyen qu'on emploie ordinairement pour déterminer les positions de divers points situés sur un plan.

881. On mène sur ce plan deux droites AX, AY, et M étant un des points dont on Fig. 13.

Pl. 67. Fig. 13. veut fixer la position, on abaisse de ce point une perpendiculaire MP sur AX. Alors connaissant AP et PM; sachant de plus si AP est à droite ou à gauche de AY, et si PM est au-dessus ou au-dessous de AX, on voit qu'on pourra toujours retrouver la position du point M, ou de tout autre point M′, M″, M‴, situé d'une manière quelconque sur le plan de AX et de AY.

Dans cette manière de rapporter les points à des droites AX et AY, on nomme AP et PM les *coordonnées* du point M; A est l'*origine* des coordonnées; AP est l'*abscisse* du point M, PM est son *ordonnée*; la droite AX s'appelle l'*axe des abscisses*, et AY l'*axe des ordonnées*.

Ordinairement l'angle XAY est droit, et les coordonnées sont dites *rectangulaires*; dans le cas contraire ce sont des coordonnées *obliques*.

Fig. 3. 882. Cela posé, prenant AX pour l'axe des abscisses de la parabole, et la tangente YY′ en A pour axe des ordonnées, de l'égalité FT = FM nous déduirons FT = DM = GP: mais AF = GA; donc FT — AF = GP — GA, ou AT = AP, ce qui donne PT = 2AP.

La droite PT, comprise entre le pied P de l'ordonnée et le point T où la tangente coupe l'axe des abscisses, se nomme la *soutangente*: on voit donc que, *dans la parabole, la soutangente est double de l'abscisse*, comptée à partir du sommet pris pour origine.

883. Si l'on cherche l'asymptote d'une parabole, on verra que le point de contact M étant à l'infini, le point T est à une distance infinie AT du sommet A, et qu'en conséquence l'asymptote tout entière est aussi à l'infini: c'est-à-dire que la parabole, quoiqu'elle ait des points à l'infini, n'a cependant pas d'asymptotes.

884. DES VARIÉTÉS *d'ellipses, d'hyperboles et de paraboles*. La parabole étant, comme nous l'avons vu (869), la même chose qu'une ellipse et qu'une hyperbole infiniment alongées, on voit, par l'intermédiaire de la parabole, qu'il y a une sorte d'identité entre les générations de ces trois lignes, et qu'elles forment un même genre de courbes dont elles sont les espèces (*). Nous allons examiner leurs variétés.

Fig. 1. 885. Supposons que l'excentricité CF = CF′ d'une ellipse soit nulle; les deux foyers F et F′ se trouveront réunis au centre C, et il est manifeste que la courbe décrite avec le fil FMF′ sera circulaire. Le cercle est donc une variété d'ellipse.

Si les axes AA′, BB′, étaient nuls, l'ellipse se réduirait à un point.

Fig. 11. Si le petit axe BB′ avait une grandeur finie, et que le grand axe dirigé suivant *aa′* fût infini, les foyers seraient à des distances infinies du point C sur la droite *aa′*; les droites menées aux foyers par les points B et B′ seraient deux parallèles MN, M′N′, au grand axe, et ces deux droites seraient l'ellipse en question. En effet, le fil générateur étant attaché à deux foyers situés à l'infini sur *aa′*, tout point M ou M′ de la courbe sera situé par rapport à ces foyers, et conséquemment par rapport à la droite *aa′*, exactement de même que les extrémités B et B′ du petit axe; donc toute corde MM′, parallèle à BB′, sera d'une longueur égale à BB′, et coupée en deux parties égales par *aa′*: donc, etc.

Fig. 7. 886. Concevons que les axes AA′, BB′, d'une hyperbole diminuent sans que leur rapport change; les hyperboles qu'on obtiendra seront semblables (866), et elles auront les mêmes

(*) Ces lignes sont les projections orthogonales, obliques et centrales d'un cercle sur des plans (609).

asymptotes, puisque les angles tels que ACP ne changeront pas. De plus, il est évident que plus les axes diminueront, plus les sommets A et A′ seront voisins, et plus les deux branches de l'hyperbole s'approcheront des asymptotes S′S, s′s. Pl. 67. Fig. 7.

Si le triangle CAP atteint la limite de ses décroissemens, limite dans laquelle on aura $CA = o$, $AP = CB = o$, sans cependant que le rapport de CA à CB soit changé, les foyers et les sommets de l'hyperbole seront réunis à son centre, et elle coïncidera avec ses asymptotes : donc les asymptotes d'une hyperbole sont une autre hyperbole, semblable à la première, et dont les axes sont nuls.

887. Si l'axe BB′ devient nul, les asymptotes se confondront avec le grand axe, et comme elles comprennent l'hyperbole, cette courbe se trouvera confondue avec le même axe; toutefois la distance AA′ n'en fera pas partie. Mais comme il y aura une hyperbole semblable pour laquelle les deux axes seront nuls, cette dernière hyperbole se confondra avec la droite indéfinie FF′ tout entière.

Si c'est l'axe AA′ qui devient nul, l'hyperbole se confondra avec l'axe BB′.

Enfin si l'axe imaginaire devient infini, sans que l'axe AA′ change, l'hyperbole se trouvera formée par deux droites élevées en A et en A′ perpendiculairement à AA′.

888. Passons aux variétés de la parabole; et puisque toutes les paraboles sont une même courbe rapportée à des échelles différentes, supposons que l'unité de l'échelle soit successivement nulle et infinie. Dans le premier cas, la parabole se confondra avec l'axe AX, et sera comprise entre le sommet A et l'infini à droite. Dans le second cas elle se Fig. 3. confondra avec la tangente YY′ au sommet A. De ces deux paraboles AX, YY′, l'une sera infiniment resserrée, l'autre infiniment ouverte.

NOTE II.

Sur les Courbes qui ont pour projections deux lignes égales semblablement disposées par rapport à une perpendiculaire à la ligne de terre.

889. Nous allons faire voir d'abord *qu'une courbe de l'espèce de celles dont nous nous occupons est toujours dans un plan incliné à 45 degrés avec les plans de projection.*

Pour démontrer cette propriété nous commencerons par le cas où les projections ABC, Pl. 67. A′B′C′, de la courbe donnée, tournent leurs concavités vers la ligne de terre. Fig. 8.

Imaginons qu'un point quelconque (A, A′) de cette courbe se meuve pour la décrire. Arrivé en un autre point quelconque (C, C′), il se sera éloigné du plan horizontal de la hauteur $nC' - lA' = m'C'$, et du plan vertical de la distance $nC - lA = mC$: c'est-à-dire qu'il se sera éloigné également du plan horizontal et du plan vertical; car il résulte de ce que les courbes ABC, A′B′C′, sont égales entre elles et semblablement disposées par rapport à une ligne BB′, perpendiculaire à ln, que $m'C' = mC$. Or, pour qu'un point mobile s'éloigne également de deux plans fixes, il faut qu'il se meuve dans un plan qui divise en parties égales l'angle de ces deux plans; donc les deux points (A, A′), (C, C′), sont dans un plan incliné à 45 degrés avec les plans de projection. Et comme ces points sont deux points quelconques de la courbe (ABC, A′B′C′), il s'ensuit que cette courbe tout entière est dans ce plan.

43..

Pl. 67. Fig. 8. Si la ligne ABC avait la position AB″C″, elle serait encore placée par rapport à BB′ de la même manière que A′B′C′, et l'on conclurait de ce que $mC'' = m'C'$, qu'en transportant le point (A, A′) en (C″, C′), on le rapprocherait du plan vertical de la distance dont on l'éloignerait du plan horizontal, ce qui montre que les points quelconques (A, A′), (C″, C′), et conséquemment la courbe entière (AB″C″, A′B′C′), seraient encore dans un plan incliné à 45 degrés avec les plans de projection.

La même conclusion aura lieu si les deux projections tournent leur convexité vers la ligne de terre, ou si la projection horizontale tournant sa concavité vers cette ligne, la projection verticale lui présente sa convexité.

890. Il est facile de voir d'après cela qu'on peut mener par le point (A, A′) quatre courbes, dont les plans fassent des angles de 45 degrés avec les plans de projection, et dont les projections soient des lignes égales à ABC, placées de la même manière par rapport à BB′. De ces quatre courbes, deux sont évidemment dans un même plan, et les deux autres dans un second plan perpendiculaire au premier.

891. Si la ligne ABC était un arc de cercle tangent à la ligne AA′, deux des quatre courbes dont il s'agit seraient les prolongemens des deux autres, et il n'y aurait dans l'espace que deux lignes courbes distinctes, au lieu de quatre, correspondantes aux diverses positions des projections ABC, A′B′C′, par rapport à BB′.

892. Et comme ces deux lignes courbes seraient sur les cylindres droits qui auraient pour bases leurs projections (168), il s'ensuit qu'elles seraient les intersections de ces cylindres avec des plans inclinés à 45 degrés sur ces mêmes cylindres : or, on sait que l'intersection d'un cylindre à base circulaire et d'un plan est une ellipse (587); ainsi les lignes courbes dont il est question seraient elliptiques.

NOTE III.

De la Méthode des courbes d'erreurs.

893. Les problèmes 1[er] et 2[e] du chapitre IV, livre I[er], ont été résolus par une méthode très féconde, qui mérite d'être développée, et qui s'emploie quand la résolution d'une question tient à la construction d'un point situé sur une courbe donnée. Elle demande un peu d'invention, et voici d'ailleurs en quoi elle consiste.

Ayant trouvé une série de suppositions, parmi lesquelles on sait qu'il y en a une qui convient au point cherché, ayant aussi trouvé le procédé favorable au but que l'on se propose par lequel on déduirait ce point de la supposition à laquelle il correspond, si elle était connue, on fait plusieurs de ces suppositions; on en déduit un suite de points dont chacun serait le point cherché, si la supposition d'où il résulte était vraie; par ces points on mène une ligne courbe qui contient nécessairement ce point, et comme il est déjà sur une courbe donnée, il se trouve l'intersection de deux courbes connues.

Pl. 8. Fig. 1. 894. Ainsi, dans la fig. 1, pl. 8, il s'agit de mener par le point M une tangente à la courbe ACB, et la question se trouve ramenée à la construction du point de contact C de cette tangente (121) : or, si la normale correspondante à ce point était connue, on abaisserait du point M une perpendiculaire sur cette normale, et le pied de cette perpendiculaire serait

le point cherché. Si donc on mène les normales ab, $a'b'$, $a''b''$..., et qu'on abaisse les perpendiculaires Mb, Mb', Mb''..., les pieds b, b', b''..., formeront une ligne courbe, dont chaque point b serait le point cherché, si la normale correspondante ab était bien choisie; donc le point cherché sera sur cette courbe : donc, etc. Pl. 8. Fig. 1.

De même dans la figure 2, où il s'agit de mener parallèlement à la droite PQ une tangente à la courbe ACB (122), le point d, ou d', ou d'', etc., coïnciderait avec le point de contact de la tangente cherchée, si cette tangente était ab, ou $a'b'$, ou $a''b''$, etc. Mais la tangente cherchée fait partie des tangentes ab, $a'b'$, $a''b''$..., de la courbe ACB; donc le point de contact de cette tangente est sur la ligne $dd'd''$..., dont chaque point serait le point cherché, si la supposition d'où il résulte était vraie : donc il est en C à l'intersection de ACB et de $dd'd''$... Fig. 2.

Ce dernier exemple montre bien que le procédé par lequel on déduit, des suppositions faites, les points d, d', d''..., doit être choisi avec sagacité pour être favorable au but que l'on se propose (*).

895. Chaque supposition fausse devant conduire à une erreur, M. Hachette a nommé *courbes d'erreurs* les courbes $bb'b''$..., $dd'd''$..., auxquelles on est conduit par la méthode que nous venons d'exposer. Fig. 1 et Fig. 2.

896. La plupart des courbes auxiliaires qui servent dans la Géométrie descriptive peuvent être considérées comme des courbes d'erreurs. Ainsi, dans la fig. 3, pl. 8, où il s'agit d'avoir le point d'intersection d'une courbe (ABC, A'B'C') et d'un plan (DE, EF), on peut supposer que le point cherché soit en projection horizontale en D, G, B, etc., et les conséquences de ces suppositions seront qu'il se projette sur le plan vertical en D', G', B', etc., ce qui donnera la courbe d'erreurs D'G'L', dont l'intersection avec A'B'C' donne le point B', et ensuite le point cherché (B, B') (123). Fig. 3.

Pour ne point entrer dans les détails que l'emploi de la dénomination de *courbes d'erreurs* aurait exigés, nous n'avons employé que celle plus générale de *courbes auxiliaires*. Mais, comme la méthode des courbes d'erreurs a des avantages qui lui sont propres, nous avons voulu en entretenir un moment le lecteur (voyez-en une application n°s 617 et 618).

Le n° 903 en offre une autre application, et pour se la rendre familière on pourra se proposer cette question : *Étant donnés une courbe et un point, construire la normale qui correspond à ce point.*

NOTE IV.

Sur les dénominations de nappes *de surfaces et de* branches *de courbes.*

897. Une hyperbole est une courbe qui a deux *branches*, et la surface qu'elle engendre en tournant sur son axe réel a deux *nappes*. Chaque branche et chaque nappe étant distincte de l'autre branche et de l'autre nappe, l'emploi des dénominations de branches et de nappes

(*) Nous avions d'abord résolu le problème du n° 122 au moyen de deux courbes auxiliaires; l'un de nos amis (M. Bélanger, Ingénieur des Ponts et Chaussées) nous a indiqué les simplifications au moyen desquelles nous n'en employons qu'une. On peut appliquer des simplifications analogues aux constructions du n° 656.

n'a ici rien d'embarrassant. Si l'on dit que la spirale développante du cercle a deux branches unies par un point de rebroussement, et un cône deux nappes unies à son sommet, ce qu'il faudra entendre sera encore fort clair. Mais si l'on dit que lorsqu'un système de droites parallèles coupe une ellipse, ces droites la rencontrent d'abord suivant une première série de points, puis suivant une seconde série d'autres points, et que la première série forme une branche de l'ellipse, et la seconde série l'autre branche, comme les branches dont on entendra parler ne seront pas séparées, ni même distinctes sans l'aide des parallèles, l'application du mot branche sera un peu forcée. De même, si l'on dit qu'une hélice a une infinité de branches, et un héliçoïde une infinité de nappes, le discours sera obscur.

Cependant, les mots de branches et de nappes s'emploient ainsi; et comme ils ne sont pas les mêmes que ceux de parties ou de portions, qu'on pourrait leur substituer, il est bon d'assigner exactement leur valeur par rapport à ces derniers.

Une partie ou une portion de courbe ou de surface est terminée à des limites quelconques absolument arbitraires, et il n'en est pas ainsi des *branches* d'une courbe ou des *nappes* d'une surface. Ces dernières sont toujours terminées à des points, ou à des lignes, qui ont une même définition, que l'on sous-entend souvent, et qui est d'ordinaire fort évidente.

Quoi qu'il en soit, il faut, autant qu'il est possible, n'appeler branches de courbes, et nappes de surfaces, que les parties séparées qu'un même fil non interrompu peut former pour les lignes, et qu'un même tissu non interrompu peut former pour les surfaces. Je dis autant qu'il est possible, parce qu'en partant de principes qui semblent conduire à des branches ou à des nappes bien séparées, on arrive quelquefois à des branches ou à des nappes réunies (478 et 486).

NOTE V.

Sur les Surfaces coniques.

898. *Théorème. Les sections d'un cône et d'une suite de plans parallèles sont semblables.*

Pl. 67. Fig. 9. Soit A le sommet du cône; MNP et mnp, deux quelconques des sections dont il s'agit; abaissons du point A une perpendiculaire AR sur le plan MNP, et soit r le point où elle percera le plan mnp. Si l'on mène par AR deux plans quelconques AMR, ANR, ils couperont les plans MNP, mnp, suivant des droites parallèles MR et mr, NR et nr; ainsi l'on aura

$$RM : rm :: AR : Ar :: RN : rn,$$

ou

$$RM : rm :: RN : rn.$$

Et comme les angles MRN, mrn, sont égaux, il s'ensuit que deux secteurs correspondans quelconques MRN, mrn, supposés infiniment étroits, sont semblables, et conséquemment que les sections MNP, mnp, se composent de sections semblables : mais les secteurs correspondans sont placés de la même manière dans les deux sections; donc, etc.

899. *Corollaire 1er.* Il suit de là que si l'on mène aux sections parallèles MNP, mnp, $m'n'p'$, etc., et par les points d'un même élément AM, une suite de tangentes elles seront parallèles entre elles.

900. *Corollaire* 2. Si l'un des plans coupans passe par le point A, la section sera un point, et les parallèles aux tangentes en M, en N, en P, etc. seront tangentes à ce point, considéré comme une courbe : d'où l'on voit qu'il aura une infinité de tangentes qui rempliront une partie considérable de l'espace. Dans le cas où le cône aurait pour base un cercle, cette partie de l'espace serait évidemment le solide extérieur aux deux nappes du cône (902). Pl. 67. Fig. 9.

901. *Corollaire* 3. Il suit de là que tout plan mené par le sommet d'un cône est tangent à ce cône, car il est facile de mener dans ce plan, et par ce sommet, deux droites qui soient les tangentes à ce sommet : il est évident même, d'après ce qu'on vient de voir, qu'il y a une infinité de manières de mener ces deux droites.

902. Ce résultat étonne ordinairement les commençans,

1°. Parce qu'on ne voit pas d'abord que tout plan mené par le sommet d'un cône ait une facette commune avec ce cône. Mais puisque ce plan contient une infinité de tangentes au sommet, il est dans le même cas que les autres plans tangens; il contient les élémens infiniment petits communs aux tangentes et à la surface; seulement, ces élémens ayant le *maximum* de petitesse, la facette commune se réduit à un point.

2°. Parce que toutes les tangentes à une surface, en un de ses points, ne sortent pas d'ordinaire d'un seul et même plan, qui est le plan tangent correspondant à ce point (147), tandis qu'ici toutes ces tangentes forment un solide. Pour expliquer cette nouvelle singularité, concevons que les axes, réel et imaginaires, d'un hyperboloïde de révolution à deux nappes, diminuent dans la même proportion, et se réduisent enfin à zéro: l'hyperboloïde s'approchera peu à peu du cône droit déterminé par les asymptotes de l'hyperbole méridienne; et lorsque les axes deviendront nuls, il se confondra avec ce cône. Or, pour chaque position de l'hyperboloïde, les tangentes aux méridiens formeront un solide, et π étant l'angle de l'asymptote et de l'axe de révolution, il y aura des tangentes perpendiculaires à cet axe, et d'autres qui feront avec lui des angles de toutes les valeurs possibles, comprises entre 90° et π. Mais tous les points de contact qui répondaient aux tangentes inclinées avec l'axe d'angles plus grands que π se trouveront réunis au sommet, lorsque l'hyperboloïde se changera en cône; donc ce sommet doit avoir une infinité de tangentes qui forment un solide extérieur au cône. En considérant un autre hyperboloïde de révolution, qui soit à une nappe, et dont l'hyperbole génératrice ait pour asymptotes les asymptotes de l'hyperbole génératrice précédente, on verra que si les axes de cette hyperbole deviennent nuls, en conservant leur rapport, l'hyperboloïde se change en un cône, et que ce cône, qui est le même que le précédent, a pour tangentes toutes les droites qu'il renferme et qui passent par son sommet : donc un cône, comme cas singulier des hyperboloïdes à deux nappes et à une nappe, dont il est la limite, a pour tangentes toutes les droites possibles qui passent par son sommet. *C'est ainsi que les cas particuliers retiennent toujours, par des propriétés singulières, une sorte d'empreinte de celles qui appartiennent aux cas généraux.*

3°. Enfin, parce que les commençans prennent l'idée des plans tangens, lorsqu'ils ne connaissent encore que des surfaces convexes, cylindriques, coniques et de révolution; ce qui les conduit à penser que ces plans ne sont jamais coupans. C'est une grave erreur dont nous avons parlé précédemment (245, 308, etc.).

NOTE VI.

Pl. 67. Fig. 12. *Étant données deux lignes courbes* LMNP, *lmnp, situées dans un même plan, mener une droite qui les touche à la fois toutes les deux.*

903. Par un point M de l'une on menera sa tangente MA; parallèlement à MA on menera la tangente mC à l'autre (122), et par le point de contact m, de cette dernière tangente, on abaissera la perpendiculaire mA sur MA. Il est clair que si MA était la tangente demandée, le point A, ainsi déterminé, serait le point de contact de cette tangente et de la ligne *lmnp*. Si donc on fait varier le point M, et qu'on fasse, sur un certain nombre des positions qu'il occupera, les opérations qu'on vient de faire sur sa première position M, on trouvera une suite de points A, A', A'', etc., dont chacun serait le point de contact de la tangente demandée et de *lmnp*, si le point M dont on est parti était celui de la même tangente et de LMNP. La courbe AA'A'' sera donc une courbe d'erreurs (893) qui contiendra le point de contact de la tangente cherchée et de *lmnp*; d'où l'on voit que ce point sera le point n.

En menant donc, par le point n, la tangente Nn à la courbe *lmnp*, cette tangente touchera tout-à-la-fois LMNP et *lmnp*, et elle sera la tangente demandée.

NOTE VII.

Fig. 10. *La transformée de la section faite par un plan* A'B', *dans un cylindre à base circulaire* {AOB, (A, AA')}, *est une sinusoïde.*

904. Supposons qu'on prenne pour origine des coordonnées le point o, de la transformée, donné par le point (O, O') de la section. Ayant porté l'arc OP de o en p, sur l'axe oX des abscisses, si l'on porte P'M' de p en m, sur la perpendiculaire à cet axe élevée en p, le point m appartiendra à la transformée dont il s'agit, et les coordonnées de ce point seront les lignes op et pm.

Faisons $op = x$, $pm = y$; nous aurons $op =$ arc $\mathrm{OP} = x$. Mais $pm = y = \mathrm{P'M'} = a \times \mathrm{O'P'} = a \times \mathrm{SP}$. On a aussi $\mathrm{SP} = \sin \mathrm{OP} = \sin x$; donc $y = a \times \mathrm{SP} = a \sin x$: ce qui donne, pour équation de la transformée, l'équation $y = a \sin x$ d'une sinusoïde.

NOTE VIII.

Des constructions géométriques et de leur exactitude.

905. On doit distinguer deux genres de constructions géométriques, celles qui n'exigent que la ligne droite et le cercle, et celles qui exigent des lignes courbes autres que des cercles. Nous allons examiner les avantages et les inconvéniens de ces deux genres de constructions.

906. Des constructions qui n'exigent *que la ligne droite et le cercle*. Il semblerait d'abord que les résultats de ces constructions fussent toujours très exacts; mais on

va reconnaître qu'il peut y avoir dans les opérations les plus simples des causes graves d'inexactitude.

907. 1°. Lorsque deux lignes se rencontrent sous un angle fort aigu, au lieu de se couper en un point unique, elles ont, sur nos dessins, où elles ne sont jamais sans largeur, un petit élément commun, et leur intersection est difficile à discerner sur cet élément. Il suit de là que les points où les lignes se coupent se trouvent d'autant moins exactement que l'angle de ces lignes est plus éloigné d'être droit.

908. 2°. Une ligne droite peut être menée par deux points, et comme ces points ont toujours une certaine étendue sur les dessins, on trace la ligne qu'ils déterminent d'autant moins exactement qu'ils sont plus rapprochés.

909. 3°. Lorsqu'un cercle est déterminé par trois points, il faut aussi, pour que les constructions soient exactes, que ces points ne soient pas trop rapprochés; et il faut en outre, pour décrire le cercle bien purement, qu'il ait un rayon qui ne soit ni trop petit ni trop grand, sans quoi le compas, trop fermé ou trop ouvert, trace des arcs irréguliers.

910. Dans les constructions compliquées, ces inconvéniens et d'autres encore se trouvent souvent rassemblés, et les résultats auxquels on parvient ne sont quelquefois pas plus exacts que si l'on opérait par sentiment. Si l'on donnait, par exemple, un angle d'un degré, et qu'on demandât d'en déduire l'angle droit, avec la règle et le compas, en construisant successivement, au moyen de l'angle donné, les angles de 2°, 4°, 8°, 16°, 32°, 64°, 80°, 88° et enfin 90°, on n'arriverait pas à un résultat plus juste que si l'on opérait à vue.

911. Ainsi, les épures qui n'exigent que la ligne droite, et la ligne circulaire, sont sujettes, comme les autres, à beaucoup d'inexactitude. Cependant, il y a généralement de l'avantage, surtout pour les dessinateurs peu exercés, à opérer par le moyen de ces lignes : les figures se font pour l'ordinaire plus promptement, plus facilement, et plus correctement.

912. Des constructions qui exigent *des lignes courbes autres que des cercles.* Ces lignes ne pouvant pas être décrites par un mouvement continu, on est ordinairement obligé d'en déterminer des points, et il faut ensuite lier ces points par un trait ferme et délié qui coïncide avec elles. Or, on sent que l'exécution de ce trait n'est point exempte d'arbitraire, et que l'arbitraire est presque toujours de l'inexactitude.

913. Cependant, entre les mains des praticiens habiles, le tracé des lignes courbes est un moyen de construction non moins exact que les moyens qui sont fournis par la ligne droite et le cercle : ce tracé corrige même souvent les fautes qui résultent de l'emploi de la règle et du compas. Ainsi, lorsqu'on a déterminé un certain nombre de points d'une courbe, on juge par la forme qu'ils indiquent s'ils sont tous bien à leur place; on rejette ceux qui sont mauvais, on en refait la construction, ou bien l'on en construit de nouveaux; et quand on n'a plus d'incertitude sur la forme et la position de cette courbe, on la trace (*).

(*) De tous les défauts que peut présenter une courbe soumise à la loi de continuité, lorsqu'elle ne s'éloigne pas sensiblement de sa véritable position, le plus grand, c'est qu'elle n'ait pas une forme gracieuse c'est donc ce défaut qu'il faut surtout éviter.

914. Pour bien juger de la forme générale d'une courbe dont on connaît quelques points (parmi lesquels il est convenable que se trouvent les points singuliers de la courbe, si elle en a, parce que ces points la caractérisent mieux que d'autres), il faut d'ordinaire beaucoup de sagacité et d'habitude. Les dessinateurs qui joignent à ces qualités l'étude des Mathématiques élevées, ont de grands avantages sur les autres, parce qu'ils s'assurent souvent, sans aucune peine, qu'une surface cherchée est plane; qu'elle a d'autres branches que celles dont on s'occupe; qu'elle s'étend à l'infini; qu'elle a des asymptotes, des points de rebroussement, d'inflexion, de serpentement; qu'elle devient, dans tels et tels cas particuliers, une autre courbe plus connue, ou le système de plusieurs courbes, etc., etc.

915. Lorsqu'on sait mener facilemnt des tangentes aux lignes courbes que l'on emploie, leur tracé est beaucoup plus aisé, parce qu'ayant à vérifier la position d'un point qui paraît mal construit, il ne s'agit que d'obtenir la tangente correspondante à ce point, pour juger aisément, par l'effet qu'elle présente, si ce point est bien ou mal placé.

916. Quand on n'a pas de moyen direct d'obtenir les tangentes, on peut employer le procédé du n° 766 : mais c'est substituer, après bien des opérations, un tâtonnement à un autre; car il faut construire des courbes auxiliaires dont on n'a que des points, et s'il y a de l'arbitraire à mener une tangente à vue, il y en a aussi à mener le trait compris entre deux points déterminés d'une courbe auxiliaire. Il est vrai que l'erreur faite en traçant une telle courbe n'altérerait pas beaucoup l'exactitude de la tangente cherchée; toutefois un dessinateur quelconque s'en fiera toujours autant à son coup d'œil qu'à un procédé aussi long, et par conséquent aussi fautif (*).

917. D'après cela, les constructions qui exigent des courbes, et celles surtout qui exigent l'emploi des tangentes, quand on n'a pas de méthodes simples pour déterminer ces tangentes, sont en général les plus vicieuses.

Quelquefois on a les tangentes, mais on ne sait pas trouver les points de contact, ou bien on ne sait les déterminer que par le procédé à peu près impraticable du n° 771, alors on est dans un cas non moins défavorable que le précédent.

918. Cependant un dessinateur habile, que la théorie éclaire, se tire ordinairement de toutes les difficultés, et opère assez sûrement avec toutes les méthodes. Toutes ont, comme nous venons de le voir, leurs causes d'inexactitude, et ces causes peuvent se combiner de telle sorte que, de deux procédés qui conduiraient à un même résultat, l'un en menant à vue des tangentes à une courbe déterminée par points, l'autre, par la ligne droite et le cercle, ce dernier soit le moins bon.

(*) Nous avons indiqué beaucoup d'autres procédés aussi peu praticables que celui du n° 766 : ils sont moins intéressans que ce dernier; toutefois nous les croyons tous utiles, soit pour compléter des théories importantes, soit pour montrer que les questions qu'ils résolvent ne sont pas à la rigueur insolubles graphiquement.

FIN DES NOTES.

TABLE DES MATIÈRES.

LIVRE Ier. PRÉLIMINAIRES.

CHAPITRE Ier. *Notions fondamentales.*

44..

CHAP. II. *Résolution des principaux problèmes que l'on peut proposer sur le point, la ligne droite et le plan, considérés par rapport aux plans de projection. Conventions sur la manière de mettre au trait les lignes des épures, selon leur objet.*

CHAP. III. *Problèmes relatifs aux points, aux droites, et aux plans.*

CHAP. IV. *Des lignes courbes.*

LIVRE II. SURFACES COURBES.

CHAP. I. *Du mode de représentation des surfaces courbes.*

CHAP. II. *Des surfaces cylindriques, coniques, et de révolution.*

CHAP. III. *Des surfaces gauches.*

CHAP. IV. *Des surfaces enveloppes.*

LIVRE III. PLANS TANGENS.

CHAP. Ier. *Des plans tangens dont le point de contact est donné.*

CHAP. II. *Des plans tangens menés par un point donné au dehors d'une surface.*

CHAP. III. *Des plans tangens menés parallèlement à une droite donnée.*

CHAP. IV. *Des plans tangens menés par une droite donnée.*

CHAP. V. *Des plans tangens à plusieurs surfaces.*

LIVRE IV. INTERSECTIONS DE SURFACES.

CHAP. Ier. *Des intersections de plans et de surfaces courbes.*

CHAP. II. *Des intersections de surfaces courbes.*

CHAP. III. *Des tangentes aux intersections de surfaces.*

CHAP. IV. *Des sections coniques.*

LIVRE V. QUESTIONS DIVERSES.

CHAP. Ier. *Développement des surfaces.*

CHAP. II. *Sur les Sphères.*

CHAP. III. *Problèmes de Trigonométrie sphérique.*

CHAP. IV. *Construction d'un point donné de plusieurs manières dans l'espace.*

LIVRE VI. COMPLÉMENT.

De la théorie des lignes courbes et des surfaces courbes.

CHAP. I. *Des surfaces gauches.*

CHAP. II. *Des enveloppes et de leurs arêtes de rebroussement.*

CHAP. III. *Des tangentes, des rayons de courbure, et des développées des lignes courbes.*

CHAP IV. *Des rayons de courbure et des lignes de courbure des surfaces courbes.*

NOTES.

NOTE I[re]. *De l'ellipse, de l'hyperbole et de la parabole.*

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.

ERRATA.

Page 24, n° 66. Les mots *horizontales et verticales*, employés deux fois, doivent être au singulier.

99, au haut de la page, *lisez* Pl. 12. Fig. 3.

105, devant la 3[e] ligne, *mettez* l'indication Pl. 17.

220, devant la 12[e] ligne, *mettez* Fig. 3, 6, 7 et 8.

221, au bout de la 7[e] ligne, finissant par les mots *sur une*, *lisez* Fig. 5.

ibid., en bas de la page, au lieu de $\frac{rm}{rm'} = \frac{pm'}{pm'} = 1$, *lisez* $\frac{rm}{rm'} = \frac{pm}{pm'} = 1$.

222, devant la 8[e] ligne, *mettez* Fig. 9, 10 et 11.

227, au bout de la 21[e] ligne, *lisez* Pl. 42. Fig. 6, 7 et 8.

ibid., ligne 23, de le voir, *lisez* de le voir (575—578).

229, la ligne 24 doit commencer ainsi : 596. Si le cône...

255, au bout de la 18[e] ligne, *lisez* Pl. 52. Fig. 3.

ibid., au bout de la 24[e] ligne, *lisez* Pl. 48. Fig. 2.

260, devant la 9[e] ligne, *lisez* Fig. 6.

301, au haut de la page, *effacez* Pl. 62. Fig. 4.

